

博士論文

母音の音声生成の音響モデルに関する研究

公立はこだて未来大学大学院 システム情報科学研究科

システム情報科学専攻

林 恭平

2011 年 3 月

Doctoral Thesis

Acoustic Modeling of Speech Production for Vowels

by

Kyohei HAYASHI

Graduate School of Systems Information Science

Future University Hakodate

March 2011

概要 本研究では、人間の音声生成系に関して高精度な音響モデルを提案する。

まず最初に、従来から良く知られている声道アナログ・モデルにおいて、デジタルフィルタモデルの実現を高精度に行う方法を提案する。

音声生成系を等価回路モデルにより解析する方法は、G. Fant の音響理論以来よく用いられてきた。このモデルでは、声道は特性の異なる分布定数線路の縦続接続により近似でき、周波数領域において縦続行列から声道の入力インピーダンスや伝搬特性を容易に計算できる。しかし、特性インピーダンスや伝搬定数が特殊な周波数依存特性を持つため、声道アナログ・モデルにおいて声道内の周波数依存特性が合成波形、特に声門流へ与える影響は未だ評価されていない。そこで、我々は声道アナログ・モデルについてデジタルフィルタモデルを実現するための新しい近似法を提案し、提案法を用いて声道内の周波数依存特性が声門流へ影響を与えることを示す。

次に、有限要素法 (FEM) と領域分割法 (DDM) を用いた三次元音響解析のための自動メッシュ生成アルゴリズムおよびそのソルバのアルゴリズムを提案する。

声道アナログ・モデルは一次元近似の一種であるため、声道がもつ複雑な三次元形状から生じる特徴を精度よく実現できない。そのため、近年は有限要素法を用いた音響シミュレーションが三次元声道形状に対して行われており、新しい知見が得られている。有限要素法において数値解析の精度を保つためには以下の条件を満たす必要がある。1. 各々のブロックが同程度のサイズである。2. 極端に潰れたブロックが存在しない。3. 曲面を精度よく近似している。自動メッシュ生成アルゴリズムにおいてこれらの条件が満たされることが望ましい。しかし、声道形状のような複雑な形状において、これらの条件を満たす自動メッシュ生成アルゴリズムは実現されておらず、手作業によるメッシュの調整が必要とされている。我々はこれらの条件を満たし、手作業を必要としない自動メッシュ生成アルゴリズムを提案し、例として日本語男性母音の声道形状に対して生成したメッシュと、FEM および提案する DDM を用いて得られた解析結果を示す。

Abstract In our study, we propose an accurate acoustic model of the speech production system for Japanese vowels.

First, we introduce a new approximation method for realizing a digital filter model of the vocal-tract analog.

The equivalent-circuit model has been used for the analysis of the speech production system using the acoustic theory of the vocal-tract analog proposed by G. Fant. In this theory, since the model of the vocal tract can be approximated with a cascaded circuit of some distributed transmission lines with different values of characteristic impedance, the driving-point impedance or the transfer function can be computed without difficulty in the frequency domain using the cascade matrix. However, since the characteristic impedance and propagation factor have singular frequency-dependent functions, the computation in the time domain is difficult using the above model, and the evaluation in the waveform of the glottal source flow has not been performed. In this paper, we propose a new approximation method for realizing a digital filter model of the vocal-tract analog with frequency-dependent characteristics, and show that the evaluation can be performed for a glottal source flow in which the effect of the frequency dependency is not small.

Secondary, we propose a new method for an auto-meshing algorithm for an acoustic analysis of the vocal tract using the Finite Element Method (FEM) and Domain Decomposition Method (DDM).

The vocal-tract analog is a kind of one dimensional model for the speech production system, but the vocal tract has complex three dimensional figures. Thus, in recent years, the FEM has been used for an acoustic analysis for the vocal tract. In order to improve the precision of the FEM analysis, the following conditions are required; each block has similar size, no extraordinary collapsed block, and precise approximation of the curved surface. In the auto-meshing algorithm, these requirements should be considered though it has difficulty. Since the vocal tract has a complex figure, it is difficult to mesh automatically with enough quality, and the auto-meshing algorithm has not been realized for this purpose. We propose a new algorithm for an auto-meshing instead of the manual treatment, and show the example of the meshes for the vocal tract figure of Japanese vowel, and trial results of the FEM simulation with the proposed DDM.

目次

第 1 章	緒言	5
1.1	本論文の構成	8
第 2 章	音声生成系に関する基礎理論	10
2.1	はじめに	10
2.2	音声生成器官	10
2.3	声道部のモデル	10
2.3.1	物理的モデル	11
2.3.2	電気回路モデル	12
	インダクタンス L	13
	キャパシタンス C	14
	直列レジスタンス $R(\omega)$	14
	並列コンダクタンス $G(\omega)$	15
	壁アドミタンス $Y_W(\omega)$	16
2.4	人間の呼気中における物理定数	16
2.5	まとめ	16
第 3 章	3次元音響解析に関する基礎理論	17
3.1	はじめに	17
3.2	有限要素法 (Finite Element Method:FEM) の基礎	18
3.2.1	重み付き残差法と弱形式化	18
	多次元へ	19
3.2.2	Galerkin 法	20
3.2.3	簡単な 1次元有限要素モデル	22
3.3	Chebyshev Collocation Method の基礎	25
3.3.1	Chebyshev Collocation Method の例	26
	3次元変形要素を用いた Chebyshev Collocation Method の数値 実験	29
	曲率の小さい 3次元形状における数値実験	29
	曲率の大きな 3次元形状における数値実験	31

3.4	Spectral Element Method の基礎	32
3.4.1	基底関数	33
	六面体要素における基底関数	34
	プリズム要素における基底関数	35
	三角要素におけるノード	36
	Fekete Points	36
	Lobatto grid over the triangle	37
	Gauss-Lobatto-Legendre quadrature	38
	Jacobi 多項式	38
	Legendre 多項式	39
3.5	領域分割法 (Domain Decomposition Method:DDM) の基礎	40
3.6	正規化座標系から実座標系への写像について	43
3.6.1	Bézier 曲線を用いた変形要素	44
3.6.2	Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) の基礎	46
3.6.3	NURBS 曲面を用いた変形要素	48
	点	49
	線分	49
	面の近似	50
	内部の近似	50
	微分値 (一階)	51
	内部	51
	実座標系から正規化座標系への微分オペレータの変換	51
	一階微分オペレータ (二次元)	51
	$\partial\xi_1/\partial x_n, \partial\xi_2/\partial x_n$ の計算法	51
	二階微分オペレータ (二次元)	52
	$\partial^2\xi_1/\partial x_n^2, \partial^2\xi_2/\partial x_n^2$ の計算法	52
	一階微分オペレータ (3次元)	54
	$\partial\xi_1/\partial x_n, \partial\xi_2/\partial x_n, \partial\xi_3/\partial x_n$ の計算法	54
	二階微分オペレータ (3次元)	55
	$\partial^2\xi_1/\partial x_n^2, \partial^2\xi_2/\partial x_n^2, \partial^2\xi_3/\partial x_n^2$ の計算法	55
3.6.4	積分の係数変換	60
3.7	数値積分	61
3.7.1	Gauss-Legendre quadrature	61
3.7.2	Gauss-Lobatto-Legendre quadrature	61
3.7.3	評価点 ξ_i と重み w_i の値	62
3.8	まとめ	62

	提案と評価	64
4.1	はじめに	64
4.1.1	声道のデジタルフィルタモデル	65
	声道モデルの縦続行列による表現	65
	ウェーブマトリクスによる表現	66
4.1.2	現状のモデルにおける問題	67
4.2	声道の特性近似における提案方法	68
4.3	より実験値に近い壁アドミタンス Y_W	68
4.4	対数領域での最急降下法	69
4.4.1	再急降下法による近似例	70
4.5	$e^{-a_i l}$ の特性近似の方法	72
4.5.1	$e^{-a_i l}$ の特性近似に用いる近似モデル	72
4.5.2	$e^{-a_i l}$ の近似アルゴリズム	74
4.5.3	$e^{-a_i l}$ の近似結果	76
4.5.4	$e^{-a_i l}$ のデジタルフィルタの実現	77
4.6	μ_{i+1} の特性近似の方法	78
4.7	声道一区間のデジタルフィルタモデルの構成	80
4.7.1	近似精度の検証	81
	体積速度伝達特性の近似精度	82
	声門における駆動点インピーダンスの近似精度	82
4.8	声門下のデジタルフィルタモデルの実現方法	85
4.9	実現したデジタルフィルタによる合成の結果と声門流に関する評価	90
4.10	まとめ	93
第 5 章	声道の 3 次元形状を考慮した合成モデルに対する提案方法と評価	94
5.1	はじめに	94
5.1.1	気体中の音場の波動方程式	95
	境界条件	97
5.1.2	FEM における問題点	98
	波動方程式の弱形式化	98
	FEM におけるメッシュ生成の必要性和問題点	99
5.1.3	メッシュ生成に関する従来研究	99
5.2	提案方法 1: 表面メッシュと内部メッシュへの分割によるメッシュ生成	101
5.2.1	領域分割法 (Domain Decomposition Method: DDM) の導入	101
	Chebyshev Collocation Method と DDM による予備実験	102
5.2.2	メッシュ生成アルゴリズム	103
	Multi-level Partition of Unity Implicits	104
	Partition of Unity	105

Adaptive Octree-based Approximation	106
$Q_i(\mathbf{x})$ の近似法	107
Dual Mesh を用いたメッシュ最適化	109
Dual Mesh の頂点生成	109
Dual Mesh の頂点から最適化メッシュ (Double Dual Mesh) の頂点生成	110
外部メッシュの補間点 Q^{Outer} の計算方法	112
3次元への拡張	113
内部メッシュの補間点 Q^{Inner} の計算方法	113
声道形状に対するメッシュ生成の結果	113
5.2.3 提案するメッシュに適したソルバ	113
5.2.4 Spectral Element Method と DDM による数値実験	118
5.3 提案方法 2:分岐部分における分割によるメッシュ生成	120
5.4 まとめ	124
第 6 章 考察と結論	125
6.1 今後の展望	126
第 7 章 各章の要約	127
参考文献	129
謝辞	135
研究業績一覧	136

第 1 章

緒言

音声は、人間にとって最も自然かつ効率的な言語情報の表現および伝達手段である。音声によって伝達される情報の中には種々のものがある。最も基本的かつ重要なのは意味情報である。これ以外の重要な情報に、話し手が誰であるかという個人性に関する情報や話し手の感情を表現する情緒性の情報などがある。人の言語の表現形式として音声の他に文字があるが、日常のコミュニケーションには音声を用いられることが圧倒的に多い。これは、音声を生成する際に身体以外に装置等を用意する必要がなく、空気を伝搬して相手に届き、受け手側にも特別な準備が必要ないという特徴を音声を介したコミュニケーションが有しているからである。

音声合成の歴史は 1791 年に制作された機械式音声合成器に始まる。von Kempelen によって制作されたこの機械式音声合成器は、ふいごによって送られた空気によってリードが鳴り、声道を模した革製の共鳴器を共振させることで音声を合成することができた。この合成器は空気の経路を選択することで有声音のみならず無声音をも合成することができた。後に、Helmholtz, D. C. Miller, R. Koenig, Stumpt によって共振系を適切な周期波形で駆動することで“音声のような音”を生成できうることが示唆された。その後 Stewart により、電気回路を用いた合成器が初めて作られ、さらに Dudley, Riesz, Watkins によって Voder が作られ初めて連続音声の合成が可能となった。この合成器はホルマント型（ターミナル・アナログ方式）の合成器の一種であり、簡易な合成回路として特にアナログ技術しか利用できなかった時代によく使われていたが、依然として有力な音声合成の方法である。さらに、1950 年代に H. K. Dunn により声道内の音波の伝搬を電気回路によって模擬しようとする声道アナログ方式の音声合成器が研究され始めた [b1]。この流れと平行して 1876 年の電話機の発明によって音声の電氣的な伝送が実用化され始めると、研究者は音声の音韻性を保ちつつ如何に低コストで音声を伝達するかという課題にこたえなくてはならなかった。その過程で明瞭度や了解度といった概念やその測定法、音声波形の強度分布やスペクトル解析など、今日の音声工学の基礎が築かれていった [a11]。やがて電子計算機の進歩やデジタル信号処理技術の進歩に伴い、合成器そのものはデジタル信号処理によって実現されるようになった。

現在の音声合成方式は、以下の三つに分類される [a9, a10]。

1. 録音編集方式…人が発生した単語等を記憶媒体に蓄積し、合成したい言葉に応じて蓄えられた音声をつないで再生する。
2. パラメータ編集方式…人が発生した音声を分析して単語以上の大きな単位の特徴パラメータの形で蓄積し、このパラメータを使用して音声合成器を制御して音声を合成する。
3. 規則合成方式…単語より小さい音素、音節などの基本単位を用いて、これらの結合方法や韻律情報（アクセント、イントネーションなど）に関する規則により音声合成器のパラメータを生成し、音声出力する。

表 1.1 各音声合成方式の特徴比較 [a9].

項目		録音編集方式	パラメータ編集方式	規則合成方式
音声品質	了解性	高	高	中
	自然性	高	中	中
語彙数		小 (500 語以下)	大 (数千語)	無限
具体例		アナログまたは PCM 録音, ADPCM 録音,	チャンネルボコーダ PARCOR, LSP など	テキスト合成システム 合成器はターミナル アナログ, PARCOR, LSP, ケプストラム, 素片接続など
情報量		24 ~ 64 kbps	2.4 ~ 9.6 kbps	50 ~ 75 bps
1Mbit での音声長		10 ~ 40 sec	100 sec ~ 7 min	無限
音素蓄積単位		単語, 文節, 文章	単語, 文節, 文章	音素, 音節, 形態素など
装置		簡単	やや複雑	複雑
ハードウェア主体		記憶装置	処理と記憶装置の併用	処理と記憶装置の併用

各方式の特徴を表 1.1 にまとめた。録音編集方式及びパラメータ編集方式は基本的に情報圧縮の考えに基づくもので、比較的簡単な処理で高品質の音声を得られる反面、合成できる語彙数が限られる。これに対して規則合成方式は複雑な処理が必要な上高品質な音声を得ることが難しい反面、合成できる語彙数に関する自由度が大きく、特に合成する言葉が限定されない分野ではその応用が大いに期待されている。

規則合成方式で用いられる音声を生成する原理としては、音声の生成機構を電氣的にモデル化して音声を作り出す声道アナログ・モデルや声道の共振/反共振現象のみをシミュレートするターミナルアナログ方式、線形予測分析 (LPC) に基づく方法などがある。

声道アナログ・モデルでは、声道は特性の異なる分布定数線路の縦続接続により近似でき、周波数領域において縦続行列から声道の入力インピーダンスや伝搬特性を容易に計算

できる。また、回路モデルをデジタルフィルタモデルを用いて実現することにより、声門下部（気管や肺）や声門部、声道部、口唇部における相互干渉を時間領域で模擬することが出来る。特に声門部では非線形効果が生じるため、時間領域での模擬が可能であるという特徴は非常に重要である。しかし、回路モデルにおいて特性インピーダンスや伝搬定数が特殊な周波数依存特性を持つことから、デジタルフィルタモデルの実現の際には近似誤差を最小とする周波数を選択し、その周波数での振幅のみを見て定数として扱う方法が用いられている [a12, b7, b11]。したがって、声道アナログ・モデルにおいて声道内の周波数依存特性が合成波形、特に声門流へ与える影響は未だ評価されていない。

さて、声道アナログ・モデルにおいて声道内の音波の伝搬は平面波であるという仮定であった。これはかなり大胆な仮定ではあるが、声道断面積関数を与えれば計算によって音声生成過程を模擬し音声波形を得ることができるし、第一近似としては十分な結果が得られている。しかし、声道がもつ複雑な3次元形状から生じる特徴を精度よく実現できない。人はそれぞれ異なった声質を有しており、各個人の音声の個人性や情緒性等の特徴量は声道が有する3次元形状から生じると考えられている。そのため、近年は有限要素法 (Finite Element Method:FEM) を用いた音響解析が3次元声道形状に対して行われており、新しい知見が得られている。FEMでは声道内の音波を平面波と仮定する必要がないため、特に4kHzを超える高周波数での音響解析に有効である。今までの電話回線では帯域が4kHz程度に制限されており、音声の音韻性を送ることが出来るに留まる。しかしながら近年のインターネット等の広帯域化により、音声伝送においても広帯域化により音韻性のみならず個人性の伝送が期待されている。

以下にFEMによる声道の音響解析に関する従来研究を概説する。1970年代から1980年代にかけては、FEMによる管内音圧分布の解析の有効性が示された [d23, d24, d25]。1990年代には、当初だ円音響管で近似された声道形状に対するFEMの検証から始まり、だ円近似の妥当性や一次元モデルとの比較がなされ [d5, d6, d7, d8, d9, d21, d22]、だ円近似が妥当であること、および一次元モデルとの差異として、有限要素モデルでは第3ホルムント以上の周波数ではホルムントの周波数や帯域幅に違いが生じ、高次伝搬モードによるものと思われる零点のような谷が伝達関数に生じることが示された。さらに、だ円近似による形状の単純化はFEMにおいて問題となりがちなメッシュ生成のコストを大幅に削減することができることから、1997年には3次元声道モデルにより母音と半母音からなる滑らかに調音が変化する連続音声合成の試みがなされ、各時間ステップにおけるインパルス応答に音源波形を畳み込むことで合成音を得る方法の有効性が示された [d20]。2000年に入るとFEMで用いられる反復解法の特徴および微分の差分近似を利用して計算コストの低減する方法が提案され、十分な精度を維持しながら計算コストは大幅に低減された [d19]。また、だ円近似とオリジナルの声道形状（分岐無し）において、“時間領域におけるFEM”による母音生成シミュレーションが行われ、両者の合成音に対して聴取実験が行われた [d10]。この実験では音源不適切であったため3次元形状の差異が合成音に与える影響は明らかにされなかったものの、音源による音声の自然性への影響が大きいことが示された。2003年には声道形状における分岐や口唇部突出し、および声道

の曲がりの簡略化への検討がなされ、各部位の存在が伝達関数に与える影響が示された [d11, d12]. 2004 年にはボクセルメッシュを用いた FEM による声道の音響解析の結果が報告された [d4]. ボクセルメッシュを用いた FEM では MR 画像から得られる声道のボクセル要素をそのまま有限要素として用いるため、メッシュ生成のコストが大幅に削減されるという利点がある. この報告では、表面を滑らかに近似した有限要素モデルとの比較はなされていないものの、実音声との比較で良い一致が見られることを示した. 2005 年以降は鼻腔を伴う声道に対して FEM を用いた音響解析が行われ、伝達関数および複素音響インテンシティ双方の面で詳細な解析結果が示された [d13].

FEM に声道内音響解析において、FEM による解析のボトルネックとなるものの一つに解析対象となる声道形状の要素分割があげられる. FEM による数値解析の精度を保つためには以下の条件を満たす必要がある. 1. 各々の要素が同程度のサイズである. 2. 極端に潰れた要素が存在しない. 3. 曲面を精度よく近似している. 自動メッシュ生成アルゴリズムにおいてこれらの条件が満たされることが望ましい. しかし、声道形状のような複雑な形状において、これらの条件を満たす自動メッシュ生成アルゴリズムは実現されておらず、手作業によるメッシュの調整が必要とされている. この手作業は時間的コストが大きく、調音とともに変化する分岐を含む 3 次元声道形状に対する音響解析は未だ行われていない.

本論文では、このような音声合成の研究の流れにあってより自然な音声の合成のためには更に高精度に音声の生成過程を模擬するモデル、特に 4kHz を超える周波数帯を高精度に模擬可能なモデルが必要であるという立場に立ち、第一近似としての声道アナログ・モデル、およびこれから主流となっていくであろう有限要素解析における問題点を克服することによって、より高品質な音声合成器を実現していくことを目的としている. そのために本論文ではまず前半において従来から良く知られる声道アナログ・モデルにおいてデジタルフィルタモデルの実現を高精度に行う方法を提案する. そして、提案方法を用いて実現したデジタルフィルタモデルを用いて声道内の周波数依存特性が声門流へ影響を与えることを示す. さらに後半では、我々は生成するメッシュ品質の条件を満たし手作業を必要としない自動メッシュ生成アルゴリズムについて論じる. そして例として日本語男性母音の声道形状に対して生成したメッシュと、FEM および提案する領域分割法 (Domain Decomposition Method:DDM) を用いて得られた解析結果を比較、検討する.

1.1 本論文の構成

まず第 2 章において音声生成器官の基本的な構造について述べる. また、音声生成器官を近似するモデルとして音響管モデルについて述べる.

第 3 章においては数値解析における基礎理論として、FEM, DDM, Spectral Element Method, Chebychev Collocation Method および正規化座標系から実座標系への写像について述べる.

第 4 章においては声道アナログ・モデルにおいて、従来のデジタルフィルタモデルの

実現方法を述べ、従来の問題点を明らかにする。さらに、デジタルフィルタモデルの実現を高精度に行う方法を提案し、その方法を詳述する。また、提案したデジタルフィルタモデルを用いて音声を合成し、従来のデジタルフィルタモデルを用いて合成した結果と波形および周波数スペクトルの観点から比較し、声道内の周波数依存特性が声門流へ影響を与えることを示す。

第5章においては、第4章にて扱ってきた声道アナログ・モデルでは声道の3次元形状から生じる特徴量を実現できないことを述べる。さらに、3次元形状内を伝搬する音波を表現するために波動方程式と呼ばれる偏微分方程式を導入し、波動方程式を数値的に解くための方法において、従来から広く用いられてきたFEMにおいてメッシュ生成におけるコストが問題となることを示す。そして提案方法1としてメッシュ生成では声道の表面と内部に領域を分割し、ソルバとしてSpectral Element MethodとDDMの組み合わせを提案し、単純形状に対して提案方法1を適用した場合の音響解析を行い、本手法の有効性を検証している。次に提案方法2として分岐部分における領域分割によるメッシュ生成の方法を提案し、提案方法2を用いて予備実験を行い、ある程度の複雑な形状において3次元音響解析におけるDDMの有効性を検証している。

第6章においては、本論文を総括し、その研究成果を述べる。また、問題点や今後の課題について述べる。

第2章

音声生成系に関する基礎理論

2.1 はじめに

本章では、音声生成系および音声生成系のモデル化について述べる。このモデルは以下に述べる4つの部分から構成され、相互干渉を及ぼしながら音声を生成する。まず1つ目は声門下（肺・気管）部であり、気流の原動力（肺圧）を生み出し、更にはその共振/反共振特性により生成される音声に幾分かの特徴を与える。2つ目は声門部で、実質的な音源として音声の原動力となる気流の断続を生み出す。3つ目は声道部であり、その複雑な形状により音声の音韻性と個人性を生み出す。そして4つ目が口唇部であり、声道の終端条件を与え、その共振特性に影響を与える。声道アナログ・モデルでは各部を伝搬する音波が平面波であることを仮定した物理モデルから、電気回路モデルを構築する。ここでは特に本研究に関係のある声道部の物理的モデルおよび電気回路モデルについて述べる。

2.2 音声生成器官

音声の生成は、音声生成器官の運動によって行われる [a11]。主な音声生成器官を図 2.1 に示す。音声の生成には音響エネルギーとしての音源と、その音響エネルギーに言語情報を担わせる調音運動が必要である。音源には、声帯の周期的な振動による有声音源、口腔内などの狭めを空気が通過する際に発生する乱流による無声音源、口唇部などにおいて閉鎖から開放へ急激に移行する際に発生するパルス状の空気の流れによる破裂音源がある。いずれの音源においても、そのエネルギー源は肺および横隔膜の運動による空気の流れである。図 2.2 に単純化した音声生成器官を示す。

2.3 声道部のモデル

ここでは声道アナログ音声合成器を構成する上で必要な声道のモデル化に関する基礎事項を述べる。ここで述べる理論や式は文献 [b2, b3] を引用・参考している。

声道アナログ音声合成器においては、音声生成器官の各構成要素を最初に物理的モデル

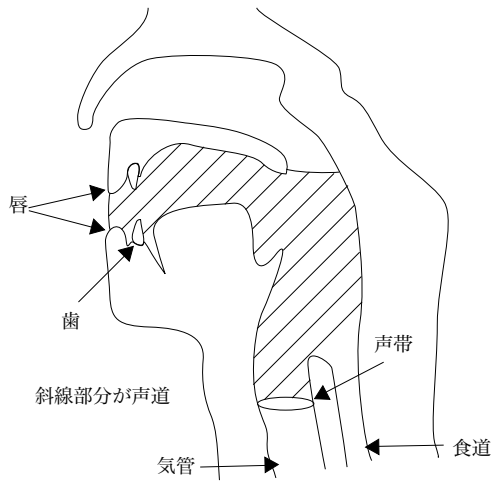


図 2.1 音声生成器官の断面図.

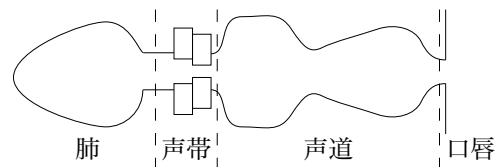


図 2.2 単純化された音声生成器官.

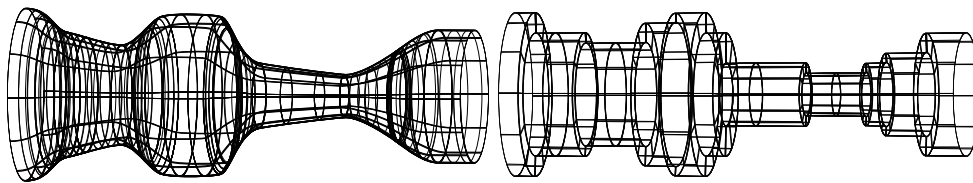


図 2.3 声道の音響管形状の例.

図 2.4 均一音響管の縦続接続による近似.

で表現し、つぎに物理的モデルと等価な電気回路モデル、そしてデジタルフィルタモデルへと変換することで計算機上で実装可能なモデルを構築する。

2.3.1 物理的モデル

声道は、調音器官の動きによって様々な形状変化を行う音響的共振器であると考えられ、調音の決定という意味で声道中の音波の伝搬についての伝達特性を記述することは非常に重要であるといえる。しかし、音波は声道中を3次元的に伝搬するので、伝達特性を厳密に求めるためには伝搬に関する微分方程式を解かなくてはならず、伝達特性を厳密に求めるのは困難である。

そこで、声道の伝達特性を近似的に計算する手法として声道を均一音響管の縦続接続で近似(図 2.3, 図 2.4)することで1次元の音響管伝達問題に変換する方法が広く用いられている。

声道形状から1次元の伝搬方程式を導出する方法を以下に示す。声道を無損失音響管と仮定した場合、声道内の粒子速度 v と音圧 P は、それぞれ位置座標 x と時間 t の関数であり、次式の関係がある。

$$\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

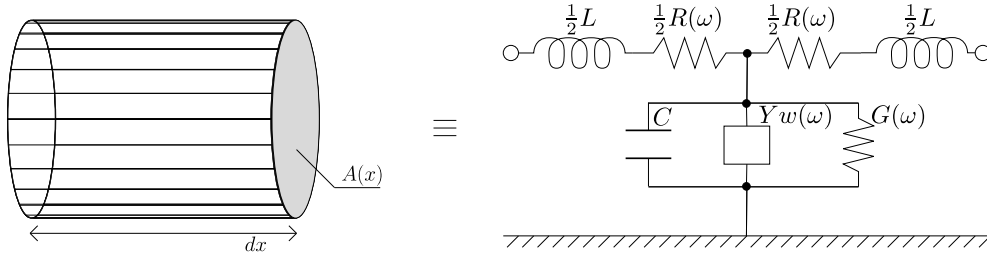


図 2.5 分布定数線路の微小区間の回路素子.

$$\kappa \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \tag{2.2}$$

ただし、 ρ は空気密度、 κ は空気の圧縮率である。ここで、粒子速度を通過面 A で積分した体積速度 U を導入する U と v の関係は次式で表される。

$$U(x, t) = v(x, t)A(x) \tag{2.3}$$

ここで式 (2.1)、式 (2.2) を書き直すと次式となる。ただし、断面積 $A(x)$ の変化は十分滑らかであるとする。

$$\rho \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$\kappa \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{A(x)} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \tag{2.5}$$

式 (2.4)、式 (2.5) より、体積速度 U を消去して、音圧のみで表すと次式となる。

$$\frac{A(x)}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right] \tag{2.6}$$

$$c^2 \cong \frac{1}{\rho\kappa} \tag{2.7}$$

ここで c は音速である。式 (2.6)、式 (2.7) は、Webster のホーン方程式と呼ばれる。

声道をいくつかの区間に分け、それぞれの区間内において $A(x)$ が一定であると近似することによって、声道全体を均一音響管の縦続接続で近似することができる。この近似された声道が、声道の物理的モデルとして用いられる。

2.3.2 電気回路モデル

声道の物理モデル 1 区間における、微小長さ dx に相当する電氣的等価回路は、図 2.5 のように表現可能であることが知られている [b3]。ここで、 L 、 C 、 R 、 G 、 Y はそれぞれ単位長さあたりのインダクタンス、キャパシタンス、直列レジスタンス、並列コンダクタンス、音響的アドミタンスである。

正弦波的に時変な電圧および電流を、それぞれ $E(x)e^{j\omega t}$, $I(x)e^{j\omega t}$ とおくと、電信方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial E(x)e^{j\omega t}}{\partial x} = -ZI(x, t) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial I(x)e^{j\omega t}}{\partial x} = -YE(x, t) \quad (2.9)$$

ここで、 Z , Y は次のような値を持つ。

$$Z = R(\omega) + j\omega L \quad (2.10)$$

$$Y = G(\omega) + Y_W(\omega) + j\omega C \quad (2.11)$$

式 (2.8), 式 (2.9) の解は、一般に次式で表される。

$$E(x) = A_1 e^{\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x} \quad (2.12)$$

$$I(x) = A_2 e^{\gamma x} + B_2 e^{-\gamma x} \quad (2.13)$$

ここで A , B は境界条件によって決定される積分定数である。また、 $\gamma = \sqrt{YZ}$ は伝搬定数と呼ばれる。

電圧および電流の前進波成分を E_1 と I_1 , 後進波成分を E_2 と I_2 とおくと、区間長 $l = dx$ における後進波成分は次式で表される。

$$E_2 = E_1 \cosh \gamma l - I_1 Z_0 \sinh \gamma l \quad (2.14)$$

$$I_2 = I_1 \cosh \gamma l - E_1 Z_0^{-1} \sinh \gamma l \quad (2.15)$$

ここで、以下の関係が存在する。

$$E_1 = A_1 + B_1 \quad (2.16)$$

$$I_1 Z_0 = A_1 - B_1 \quad (2.17)$$

また、 $Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$ は回路の特性インピーダンスである。

以下にインダクタンス, キャパシタンス, 直列レジスタンス, 並列コンダクタンス, 音響的アドミタンスおよび人間の呼気中における物理定数を示す。なお、 S は音響管の周長である。

インダクタンス L

図 2.5 に示した音響管内に含まれる空気の状態は、空気密度を ρ とすると $\rho A dx$ と表すことができる。圧力の微小変化はニュートンの運動方程式より次式で表現できる。

$$dP = \rho dx \frac{dv}{dt} = \rho \frac{dx}{A} \frac{dU(x, t)}{dt} \quad (2.18)$$

ここで、 $U(x, t) = U(x)e^{j\omega t}$ とおくと、次式となる。

$$dP = j\omega \rho \frac{dx}{A} U \quad (2.19)$$

$$\frac{dP}{dx} = j\omega L U \quad (2.20)$$

したがってインダクタンス L は

$$L = \frac{\rho}{A} \quad (2.21)$$

となる。

キャパシタンス C

C は音響管内に含まれる気体の体積圧縮性により生じるものである。体積 Adx における気体の断熱的膨張（または圧縮）についての以下の関係が知られている。

$$PV^\eta = \text{const} \quad (2.22)$$

ただし、 P および V は気体の圧力および体積で、 η は定圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比である。これを時間微分すると次式となる。

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\frac{\eta}{V} \frac{dV}{dt} \quad (2.23)$$

圧力増加による気体体積の減少は、体積の流れとなり $U = -\frac{dV}{dt}$ と表されるため、次式が得られる。

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{\eta U}{V} \quad (2.24)$$

ここで、正弦波的圧力振動 $P = P_0 + pe^{j\omega t}$ を考える。 P_0 は静止状態の圧力で、 p に比べ大きいものとする。圧縮による体積流は次式で近似可能である。

$$U = j\omega \frac{V}{P_0\eta} p = j\omega \frac{Adx}{P_0\eta} p \quad (2.25)$$

$P_0\eta$ は ρc^2 に等しいので、単位長さあたりの体積速度は次式となる。

$$U = j\omega \frac{A}{\rho c^2} p \quad (2.26)$$

$$= j\omega C p \quad (2.27)$$

ここで、

$$C = \frac{A}{\rho c^2} \quad (2.28)$$

がキャパシタンスとなる。

直列レジスタンス $R(\omega)$

$R(\omega)$ は音響管壁面での粘性摩擦によって起こるエネルギーの損失を表す。ここで、管壁は十分大きな平面とし、 x 方向に速度 $v = v_m e^{j\omega t}$ で振動するものとする。壁に接している気体粒子は、その媒体の粘性係数 μ によってもたらされる力を受ける。このようにして、気体が単位面積あたりにおける力によって損失が生じる。

y 方向へ単位面積で厚さが dy の層を考える。この層に加わる力の総和は次式で表される。

$$\mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_y \right] = \rho dy \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.29)$$

ここで、 v は x 方向への粒子速度である。壁表面からの距離で表される拡散方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial v}{\partial t} = j \frac{\omega \rho}{\mu} v \quad (2.30)$$

ここで、 $k_v^2 = \frac{j\omega\rho}{\mu}$ と置くことで解を次のように表すことができる。

$$v = v_m e^{-k_v y} = v_m e^{-\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu y}}} e^{-j\sqrt{\frac{\omega\rho}{2\mu y}}} \quad (2.31)$$

粒子速度が壁上の振動と比べて $\frac{1}{e}$ となる距離を、boundary-layer thickness と呼ぶ。この値 δ_v は、 $\delta_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho}}$ となる。

壁上における単位面積あたりの粘性による力は、

$$F = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu k_v v_m \quad (2.32)$$

もしくは、

$$F = v_m (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu\rho}{2}} \quad (2.33)$$

で表される。

壁の単位表面積における損失の平均 \bar{P} は次式で表される。

$$\bar{P} = \frac{1}{2} |F| v_m \cos \theta = \frac{1}{2} v_m^2 R_s(\omega) \quad (2.34)$$

ここで、 $R_s(\omega) = \sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}}$ は、単位面積あたりのレジスタンスで、 θ は F と v の位相角であり、45度である。音響管の長さを l 、周長を S とすれば、その側面積は Sl となり、管の単位長さあたりの損失は、次のように表される。

$$\bar{P}S = \frac{1}{2} v_m^2 S R_s(\omega) = \frac{1}{2} U^2 R(\omega) \quad (2.35)$$

したがって、レジスタンス R は以下の式で表される。

$$R(\omega) = \frac{S}{A^2} \sqrt{\frac{\omega\rho\mu}{2}} \quad (2.36)$$

並列コンダクタンス $G(\omega)$

$G(\omega)$ は音響管壁の熱伝導性によって起こる熱損として表現され、以下の式で表される。

$$G(\omega) = S \frac{\eta - 1}{\rho c^2} \sqrt{\frac{\lambda\omega}{2c_p\rho}} \quad (2.37)$$

壁アドミタンス $Y_W(\omega)$

$Y_W(\omega)$ は音響管壁の振動によるエネルギーの損失として生じ、以下の実験式で表される。

$$Y_W(\omega) = \frac{S}{1400 + 1.6j\omega} \quad (\text{鈴木}の近似) \quad (2.38)$$

又は,

$$Y_W(\omega) = \begin{cases} \frac{0.4S}{700+0.5j\omega} & (f < 325) \\ \frac{0.4S}{1900+0.3j\omega} & (f \geq 325) \end{cases} \quad (2.39)$$

(神山らの近似)

式 (2.38) は文献 [b12] から引用した。

式 (2.39) の近似は音響実験によって実測されたデータから求められた実験式である [b5, b6]。本稿では、式 (2.39) を $Y_W(\omega)$ とし、 s の有理多項式 (6/6) を用いて近似して壁アドミタンスとして用いる。

2.4 人間の呼気中における物理定数

上述の定数は人間の呼気中においておよそ以下のような値となる。

$$\begin{aligned} \rho &= 1.14 \times 10^{-3} \text{ [g/cm}^3\text{]} \\ c &= 3.58 \times 10^4 \text{ [cm/sec]} \\ c_p &= 0.24 \text{ [cal/g} \cdot \text{K]} \\ \lambda &= 5.5 \times 10^{-5} \text{ [cal/cm} \cdot \text{sec} \cdot \text{K]} \\ \mu &= 1.86 \times 10^{-4} \text{ [dyne} \cdot \text{sec/cm}^2\text{]} \\ \eta &= 1.4 \end{aligned}$$

2.5 まとめ

本章では、音声性器官の概要について述べた。さらに、これまで行われてきた声道部の一次元のモデル化について述べた。本研究では、まず一次元のモデルをより高精度にすることを試みている。さらに、一次元のモデルでは表現できない3次元声道形状における特徴量を別の方法でシミュレートし、一次元のモデルと複合させることでより高精度な音声合成を行いたいということを念頭に置いている。

第 3 章

3 次元音響解析に関する基礎理論

3.1 はじめに

3次元声道形状内における FEM を用いた音響解析は概して以下の手順で行われる。

1. MR 画像から 3次元声道形状を抽出する。
2. 抽出された 3次元声道形状内を六面体もしくはプリズム，四面体要素を充填する（プリプロセス）。
3. プリプロセスにて得られた要素モデルを用いて波動方程式を近似的に解く（ソリューションプロセス）。
4. ソリューションプロセスにて得られた数値解から所望のデータが得られるように可視化する（ポストプロセス）。

本論文では特にプリプロセスにおける人的コストを削減することを念頭において，新しいプリプロセスとソリューションプロセスの方法を 3次元声道形状における音響解析へ適用を試みる。

本章では，本論文の後半において FEM による音響解析の問題点の解決のための方法を述べるにあたって必要な基本的事項について述べる。まずは，ソリューションプロセスにおいて従来から良く用いられて来た FEM について詳述する。さらに，FEM に替わる数値解法として Chebychev Collocation Method および Spectral Element Method について述べる。これらもソリューションプロセスで用いられる方法であるが，Chebychev Collocation Method は数値積分を必要としないものの同時に解くべき行列の条件数が悪化しやすい。また，Spectral Element Method は数値積分が必要ではあるものの，高次の基底関数を用いる数値解法のうちでは比較的行列の条件数が悪化しにくい。次に，DDM について述べる。DDM は対象となる領域を複数の小領域に分割し，各々の小領域において FEM などを用いて交互に数値解を求めて，全体としての数値解を取束させていく。分割した各々の領域に対して独立してメッシュを生成できるため，メッシュ生成時の拘束条件が大幅に緩和される見込がある。次に，3次元形状における数値計算のために実座標系と正規化座標系の写像について述べる。最後に，積分を計算機上で行うために数値積分の

方法について述べる.

3.2 有限要素法 (Finite Element Method:FEM) の基礎

FEM は偏微分方程式などの強力な数値解法であるが, 微分方程式を直接に扱わない. 方程式を積分により少し変形して扱うのが普通であり, その指導原理として用いられるのが弱形式化である. 以下では, まず微分方程式の弱形式化について述べ, 次に Galerkin 法, 簡単な有限要素モデルについて述べる.

3.2.1 重み付き残差法と弱形式化

波動方程式のように, 現象の数式による記述にはしばしば微分方程式が用いられる. 次の簡単な1次元問題を考える.

単位区間 $(0, 1)$ で与えられた関数 $f(x)$ に対し, 次式を満足する関数 $u(x)$ を求めよ.

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x) & (0 < x < 1) \\ u(0) = \alpha, \quad \frac{d}{dx}u(x)\Big|_{x=1} = \beta \end{cases} \quad (3.1)$$

まず, 式 (3.1) の上側の式を変形し,

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) - f(x) = 0 \quad (3.2)$$

とする. さらに,

$$v(0) = 0 \quad (3.3)$$

を満たす以外は連続な任意の関数 $v(x)$ を重み関数として用意し, これを式 (3.2) にかけて, x について 0 から 1 まで積分すると,

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2}{dx^2}u(x) + f(x) \right\} v(x) dx = 0 \quad (3.4)$$

となる. この左辺が重み付き残差である.

次に, 式 (3.1) の下側の第 2 式に $v(x)$ をかけ, 先の式と和をとり, 変形すると

$$-\int_0^1 \frac{d^2}{dx^2}u(x)v(x)dx + \frac{d}{dx}u(x)v(x)\Big|_{x=1} = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(x)\Big|_{x=1} \quad (3.5)$$

となる. ここで, 左辺に部分積分を施せば,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}u(x) \frac{d}{dx}v(x)dx - \left[\frac{d}{dx}u(x)v(x) \right]_0^1 + \frac{d}{dx}u(x)v(x)\Big|_{x=1} = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(x)\Big|_{x=1} \quad (3.6)$$

となり, $v(0) = 0$ であることに注意すれば,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}u(x) \frac{d}{dx}v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(x)\Big|_{x=1} \quad (3.7)$$

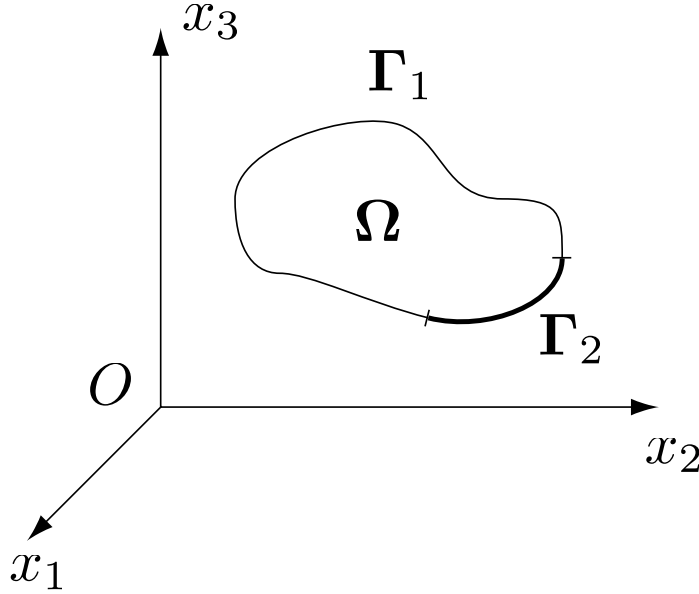


図 3.1 領域 Ω とその境界 Γ .

を得る.

式 (3.7) 中の $u(x)$ に関する導関数の階数は式 (3.1) の上側の式中のそれよりも低く, $u(x)$ に求められる微分可能性は弱められている.

多次元へ

ここまでは 1 次元の場合について述べてきたが, ここではそれを多次元に拡張する.

n 次元空間 $n = 1, 2, 3$ を考え, 点を $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ と表す. Ω を空間内の有界な領域とし, その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする.

図 3.1 に示すように, 境界 Γ を 2 つの部分 Γ_1, Γ_2 に分ける. ただし, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ とする. ここでは Ω 内で定義された関数 $f(\mathbf{x})$, Γ_1 上で定義された関数 $g_1(\mathbf{x})$, Γ_2 上で定義された関数 $g_2(\mathbf{x})$ を与えて, 次の条件を満たす関数 $u(\mathbf{x})$ を求める問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & (\Omega \text{内}) \\ u(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) & (\Gamma_1 \text{上}), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) & (\Gamma_2 \text{上}), \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで, Δ は次式で与えられる Laplace 作用素である.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (3.9)$$

ここで, 2 種類の境界条件が存在しているが, それぞれを一般に以下のように呼ぶ.

1. $u(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})$ (Γ_1 上): 第一種境界条件, または Dirichlet 条件
2. $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x})$ (Γ_2 上): 第二種境界条件, または Neumann 条件

次に、1次元の場合と同様にして弱形式を導く。 $v(\mathbf{x})$ を

$$v(\mathbf{x}) = 0 \quad (\Gamma_1 \text{上}) \quad (3.10)$$

を満たす任意の連続な関数とする。式 (3.8) の上側に $v(\mathbf{x})$ をかけて Ω で積分する。さらに、式 (3.8) の下側の第2式に $v(\mathbf{x})$ をかけ、 Γ_2 上で積分し、先の式に加える。したがって、

$$-\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

となる。次に Green の公式を用いて式 (3.11) の左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

が得られ、式 (3.10) に注意すれば、次の弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

3.2.2 Galerkin 法

前節で考えた微分方程式や弱形式で表した問題の解は関数であり、解を指定するには一般に無限の自由度を必要とする。一方で計算機で扱える変数の数は有限であり、解を厳密に求めることは特別の場合をのぞいて不可能である。しかし、工学的にはある程度の誤差を許容して近似解を求めることが有用な場合がある。そのための方法の一つが Galerkin 法である。

まず、求めるべき未知関数 $u(\mathbf{x})$ を近似する関数 (近似関数) の形を定める。最も一般的な方法は既知の関数をいくつか選び、その1次結合によって $u(\mathbf{x})$ を近似する方法である。すなわち、

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \psi_i(\mathbf{x})a_i = \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

とする。なお、 $\psi_i(\mathbf{x})$ を基底関数、 $\hat{u}(\mathbf{x})$ を試行関数と呼ぶことがある。基底関数をうまく選べば、未知変数の数 m が大きいほど $\hat{u}(\mathbf{x})$ は $u(\mathbf{x})$ を良好に近似することが期待できる。

次に、係数 a_i を求める方法を考える。まず、式 (3.13) において、 $u(\mathbf{x})$ の代わりに $\hat{u}(\mathbf{x})$ を用いることとした。そこで、 $v(\mathbf{x})$ の代わりに、

$$v(\mathbf{x}) \approx \hat{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \psi_i(\mathbf{x})b_i = \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

を用いてみる。

式(3.14), (3.15)を式(3.13)に代入すると, 第一項は

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{v}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right\} \quad (3.16)$$

となり, 同様に第二, 第三項はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) \hat{v}(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) \left\{ \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\} \\ &= f(\mathbf{x}) \left\{ \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & g_2(\mathbf{x}) \hat{v}(\mathbf{x}) \\ &= g_2(\mathbf{x}) \left\{ \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\} \\ &= g_2(\mathbf{x}) \left\{ \begin{bmatrix} \psi_0(\mathbf{x}) & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで, 各項の左側からベクトル $[b_0, b_1, \dots, b_m]$ が掛かっているため, これを除いて以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \cdots & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \cdots & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_0(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} & \cdots & \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \psi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x}) \psi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x}) \psi_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} g_2(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

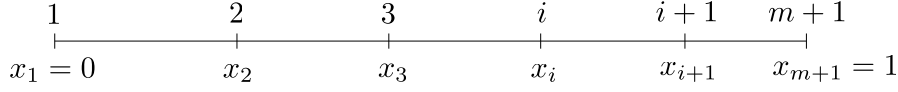


図 3.2 1次元の要素分割例.

となる.

この連立方程式を解くことによって, 数値解の係数 $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_m]$ が求まる. Dirichlet 条件を含む問題の場合では係数 \mathbf{a} のとり方に拘束条件を与えるのが普通である. しかし, 数値解の基底関数 ψ_i が補間関数であるか近似関数であるかによってその方法は異なる. 本研究では Dirichlet 条件が含まれないため, 詳細は省くが, 以下の節で数値解の基底関数 ψ_i が補間関数である場合における Dirichlet 条件の扱い方を簡単に述べる.

3.2.3 簡単な1次元有限要素モデル

簡単な1次元有限要素モデルを用いて, 本節では直接剛性法による近似方程式の組み立て方を述べる.

まず, 次の常微分方程式の境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x) & (0 < x < 1) \\ u(0) = \alpha, & \left. \frac{d}{dx}u(x) \right|_{x=1} = \beta \end{cases} \quad (3.20)$$

3.2.1 節と同様に弱形式を求めると,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}u(x) \frac{d}{dx}v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \beta v(x) \Big|_{x=1} \quad (3.21)$$

が得られる. ただし, $u(x)$ は $u(x) = \alpha$ を満たし, $v(x)$ は $v(0) = 0$ を満たす任意の関数である.

FEM では, まず区間 $(0, 1)$ を図 3.2 のように m 個の副区間に分割する. 1つ1つの副区間を有限要素と呼び, 分割の分点を接点と呼ぶ. 分点は次のように並べられているものとする.

$$x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{m+1} = 1 \quad (3.22)$$

i 番目の要素における関数 $u(x)$ の近似関数 $\hat{u}(x)$ は x の1次式とする. すなわち, i 番目の要素においては

$$\hat{u}(x) = \frac{x_{i-1} - x}{x_{i-1} - x_i}u_i + \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}u_{i+1} \quad (3.23)$$

であるとする. ここで, u_i, u_{i+1} はそれぞれ x_i, x_{i+1} における $\hat{u}(x)$ の値である.

3.2.2 との対応をつけるために, 各 $i, (2 \leq i \leq m)$ に対して次の関数を定義する

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.24)$$

また, $i = 0, m + 1$ に対しては, 関数 $\psi(x)$ を次のように定める.

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\psi_{m+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} & (x_m \leq x \leq x_{m+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.26)$$

以上から, $u(x)$ の近似関数 $\hat{u}(x)$ は

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} u_i \psi_i(x) = \alpha \psi_1(x) = \sum_{i=2}^{m+1} u_i \psi_i(x) \quad (3.27)$$

と表せる. ここで, 境界条件 $u(0) = \alpha$ を用いた. さらに, 重み関数 $\hat{v}(x)$ は

$$\hat{v}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} v_i \psi_i(x) = \sum_{i=2}^{m+1} v_i \psi_i(x) \quad (3.28)$$

とする. ここで, $\hat{v}(0) = v$ を用いた.

次に, 3.2.2 節にしたがって要素行列を作る. まず, 次のようなベクトルと行列を定義する.

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_i, \mathbf{f}_i$ を具体的に計算すると, 次式のようなになる.

$$A_{11}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{d}{dx} \psi_i(x) \right\}^2 dx = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-1)^2 dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.29)$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \psi_i(x) \frac{d}{dx} \psi_{i+1}(x) dx = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -1 \cdot 1 dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.30)$$

$$A_{22}^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{d}{dx} \psi_{i+1}(x) \right\}^2 dx = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 dx = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.31)$$

$$f_j^{(i)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \psi_j(x) dx \quad (3.32)$$

次に, 直接剛性法を用いて近似方程式を作る. まず, 今までで得られた要素行列や要素ベクトルを次のように $m + 1$ 次元に拡大する.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_1^i \\ f_2^i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1, \\ \vdots \\ m+1 \end{matrix}, \quad \mathbf{g}_m^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_i^* = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ i+1 \\ \vdots \\ m+1 \end{matrix}$$

さらに、積分範囲をみてみると、

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \hat{u}(x) \frac{d}{dx} \hat{v}(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \hat{u}(x) \frac{d}{dx} \hat{v}(x) dx \quad (3.33)$$

$$\int_0^1 f(x) \hat{v}(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \hat{v}(x) dx \quad (3.34)$$

であるから、

$$\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^*, \quad \mathbf{f}^* = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i^* + \mathbf{g}_m^* \quad (3.35)$$

とすれば、

$$\mathbf{A}^* \mathbf{u} = \mathbf{f}^* \quad (3.36)$$

となる。ここで、 $u(0) = \alpha$ に対応して、 \mathbf{u} の第1成分は α であるというように既知であるから、 \mathbf{A}^* から第1行と第2行を除いた行列を \mathbf{A} 、 \mathbf{u} から第1成分を除いたベクトルを \mathbf{u}^* 、また、

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^* - \alpha \begin{bmatrix} A_{21}^* \\ A_{21}^* \\ \vdots \\ A_{m+1,1}^* \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

とおけば、解くべき方程式は

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{f} \quad (3.38)$$

である。

3.3 Chebyshev Collocation Method の基礎

数値解の基底関数や重み付き残差法の重み関数の選び方により種々の方法が提案されている [c4]. DDM を用いた場合, 分割した領域においてある領域を解く際には, 隣の領域における近似解を用いて解くといった手順を繰り返すことで解を取束させる. この際に FEM のような弱形式を用いて解く方法を用いると, 繰り返しの度に数値積分を行う必要があり, 計算コストが増加する. しかし, Chebyshev Collocation Method では数値積分を行う必要がないため, 他の方法と比較して計算コストが小さいという特徴を持ちながらも, 精度の高い解法として知られている [c4, c5]. ここでは, Chebyshev Collocation Method について述べる.

まず, 座標系として正規化座標系 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3], (\xi_i \in [-1, 1])$ を用いる. 3次元における Chebyshev Collocation Method では, 基底関数 ψ_j に Chebyshev 多項式 $T_q(\xi)$ を用いて

$$\psi_{p(m_1, m_2, m_3)}(\boldsymbol{\xi}) = T_{m_1}(\xi_1)T_{m_2}(\xi_2)T_{m_3}(\xi_3) \quad (3.39)$$

を用いる. ここで, m_1, m_2, m_3 はそれぞれ ξ_1, ξ_2, ξ_3 方向の次数である. また関数 $p(m_1, m_2, m_3)$ は m_1, m_2, m_3 に対して離散的連続な一意の値をとる任意の関数である.

Chebyshev 多項式 $T_q(\xi)$ は

$$T_q(\xi) = \cos(q \cos^{-1}(\xi)) \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (3.40)$$

で定義され, 重み $1/\sqrt{1-\xi^2}$ の直交多項式である. つまり,

$$\int_{-1}^1 T_m(\xi)T_n(\xi) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases} \quad (3.41)$$

を満たす.

図 3.3 に 0-3 次の Chebyshev 関数を示す.

さらに, $v_q(\xi)$ には

$$\delta_q(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = \xi_q) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.42)$$

なるデルタ関数を用いて

$$v_{s(m_1, m_2, m_3)}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{m_1}(\xi_1)\delta_{m_2}(\xi_2)\delta_{m_3}(\xi_3) \quad (3.43)$$

を用いる. ここで, $s(m_1, m_2, m_3)$ は $p(m_1, m_2, m_3)$ と同様に, m_1, m_2, m_3 に対して離散的連続な一意の値をとる任意の関数である. $s(m_1, m_2, m_3) = p(m_1, m_2, m_3)$ としてもよい. また, ξ_q は次式で表される N 次の Chebyshev 多項式における Chebyshev-Gauss-Lobatto の積分点である [c5].

$$\xi_q = -\cos\left(\frac{\pi q}{N}\right) \quad (q = 0, 1, \dots, N) \quad (3.44)$$

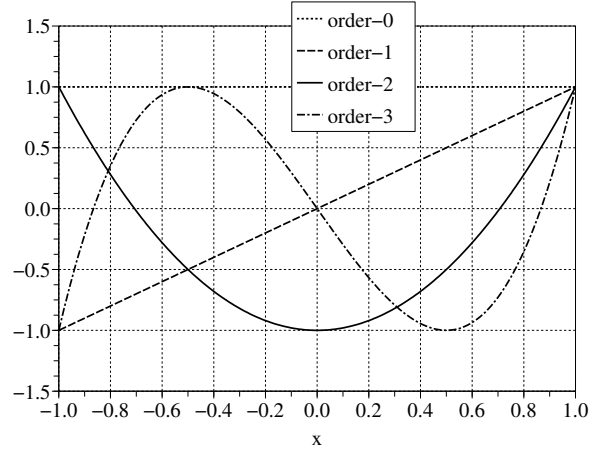


図 3.3 0-3 次の Chebyshev 関数.

以上で与えられた $\psi_p(m_1, m_2, m_3)$, $v_s(m_1, m_2, m_3)$ を用いれば, 5.1.1 節の波動方程式と境界条件はそれぞれ以下のように変形される. ここで, 式の簡略化のため $p = p(m_1, m_2, m_3)$, $s = s(m_1, m_2)$ とおいていることに注意されたい.

$$\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_3} a_p \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Omega), \quad (3.45)$$

$$\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_3} a_p \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \psi_p(\xi_s) = -u_0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{\text{in}}), \quad (3.46)$$

$$\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_3} a_p \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{\text{wall}}), \quad (3.47)$$

$$\sum_{m_1=0}^{N_1} \sum_{m_2=0}^{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_3} a_p \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{\text{rad}}). \quad (3.48)$$

ただし, ξ_1 方向, ξ_2 方向, ξ_3 方向それぞれ N_1 , N_2 , N_3 次の Chebyshev 多項式を用いた.

次に式 (3.45), (3.46), (3.47), (3.48) を連立させて係数 $a_p(m_1, m_2, m_3)$ を求めればよい.

さらに, 正規化座標系 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, ($\xi_i \in [-1, 1]$) ではない, 変形要素を用いる場合には, 3.6 章で述べる微分オペレータの変換を用いる.

3.3.1 Chebyshev Collocation Method の例

ここでは, 図 3.4 に示すような形状 Ω における Chebyshev Collocation Method の例を示す. 簡単のため 2 次元での例とした. 図中の \circ は Chebyshev-Gauss-Lobatto の積

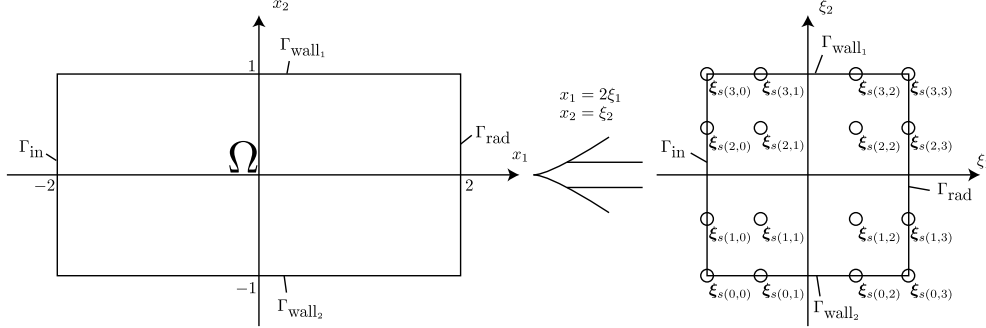


図 3.4 Chebyshev Collocation Method の例題として用意した形状。○ は Chebyshev-Gauss-Lobatto の積分点 $\xi_{s(m_1, m_2)}$ を示す。

分点 $\xi_{s(m_1, m_2)}$ を示している。また、 ξ_1 , ξ_2 方向への展開次数は 3 次とした。

まず正規化座標系 ξ から実座標系 x への写像は以下のように定義した。

$$x_1 = 2\xi_1, \quad (3.49)$$

$$x_2 = \xi_2. \quad (3.50)$$

つぎに、微分オペレータの変換は式 (3.135) に従い、

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (3.54)$$

となる。ここで、境界 Γ_{in} , Γ_{wall1} , Γ_{wall2} , Γ_{rad} における法線がそれぞれ $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[0, -1]$, $[1, 0]$ であることを考慮すると、式 (3.45), 式 (3.46), 式 (3.47), 式 (3.48) はそれぞれ以下ようになる。ここで、式の簡略化のため $p = p(m_1, m_2)$, $s = s(m_1, m_2)$ とおいていることに注意されたい。

$$\sum_{m_1=0}^3 \sum_{m_2=0}^3 a_p \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Omega), \quad (3.55)$$

$$\sum_{m_1=0}^3 \sum_{m_2=0}^3 a_p (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_p(\xi_s) = -u_0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{in}), \quad (3.56)$$

$$\sum_{m_1=0}^3 \sum_{m_2=0}^3 a_p \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{wall}} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{wall1}), \quad (3.57)$$

$$\sum_{m_1=0}^3 \sum_{m_2=0}^3 a_p \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{\text{wall}_2}), \quad (3.58)$$

$$\sum_{m_1=0}^3 \sum_{m_2=0}^3 a_p \left\{ (1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_p(\xi_s) = 0 \quad (\xi_s \in \Gamma_{\text{rad}}). \quad (3.59)$$

次に、 ξ_s へ具体的な値を入れ、上式を連立して行列をつくる。 $p(m_1, m_2) = 4m_1 + m_2$, $s(m_1, m_2) = 4m_1 + m_2$ とすれば、

$$\begin{bmatrix} \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(0,0)}) & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(0,0)}) & \cdots & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(0,0)}) \\ \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(0,1)}) & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(0,1)}) & \cdots & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(0,1)}) \\ \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(0,2)}) & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(0,2)}) & \cdots & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(0,2)}) \\ \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(0,3)}) & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(0,3)}) & \cdots & \left\{ (-1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(0,3)}) \\ (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_0(\xi_{s(1,0)}) & (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_1(\xi_{s(1,0)}) & \cdots & (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_{15}(\xi_{s(1,0)}) \\ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_0(\xi_{s(1,1)}) & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_1(\xi_{s(1,1)}) & \cdots & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(1,1)}) \\ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_0(\xi_{s(1,2)}) & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_1(\xi_{s(1,2)}) & \cdots & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(1,2)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(1,3)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(1,3)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(1,3)}) \\ (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_0(\xi_{s(2,0)}) & (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_1(\xi_{s(2,0)}) & \cdots & (-1) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi_{15}(\xi_{s(2,0)}) \\ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_0(\xi_{s(2,1)}) & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_1(\xi_{s(2,1)}) & \cdots & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(2,1)}) \\ \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_0(\xi_{s(2,2)}) & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_1(\xi_{s(2,2)}) & \cdots & \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(2,2)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(2,3)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(2,3)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(2,3)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(3,0)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(3,0)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(3,0)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(3,1)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(3,1)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(3,1)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(3,2)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(3,2)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(3,2)}) \\ \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_0(\xi_{s(3,3)}) & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_1(\xi_{s(3,3)}) & \cdots & \left\{ (1) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \right\} \psi_{15}(\xi_{s(3,3)}) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

となり、これを $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{15}]^T$ について解けばよい。

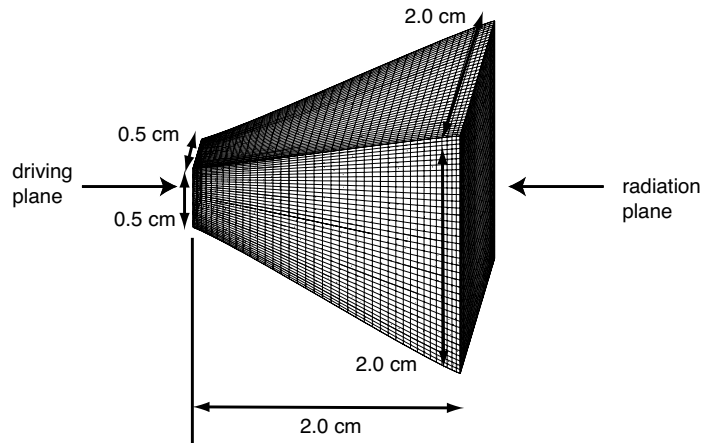


図 3.5 変形要素 1.

3次元変形要素を用いた Chebychev Collocation Method の数値実験

ここでは、3.6.1 節で述べる Bézier 曲線を用いた変形要素を用いて、Chebychev Collocation Method の数値実験を行い、その結果を FEM を用いた数値事件の結果と比較、検討する。Chebychev Collocation Method および FEM の数値実験のプロパティをそれぞれ表 3.1、表 3.2 に示す。

表 3.1 Chebychev Collocation Method のプロパティ.

音波の伝搬方向の展開次数	24 次
その他の方向の展開次数	各 12 次

表 3.2 FEM のプロパティ.

音波の伝搬方向の要素分割数	27 分割
その他の方向の要素分割数	各 12 分割
各要素の基底関数の次数	各 1 次

■曲率の小さい 3次元形状における数値実験 まず、図 3.5 に示すようなホーンについて波動方程式を解いた。2kHz, 4kHz, 6kHz, 8kHz, 10kHz, 12kHz について解いた際の速度ポテンシャルの絶対値の分布をそれぞれ図 3.6, 図 3.7, 図 3.8, 図 3.9, 図 3.10, 図 3.11 に示す。さらに、図 3.12 に同じ形状を FEM を用いて求めた体積速度伝達関数との比較を示す。両者の体積速度伝達関数がよく一致していることが見て取れる。

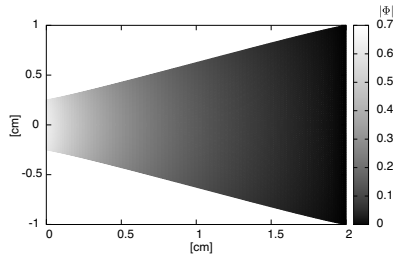


図 3.6 変形要素 1 : 2kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

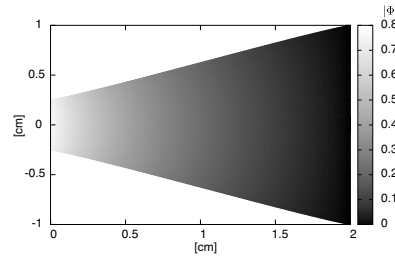


図 3.7 変形要素 1 : 4kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

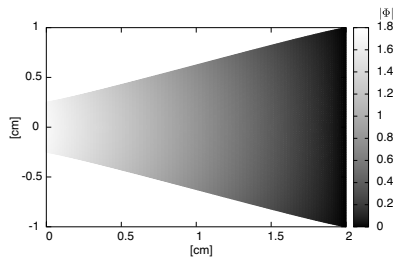


図 3.8 変形要素 1 : 6kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

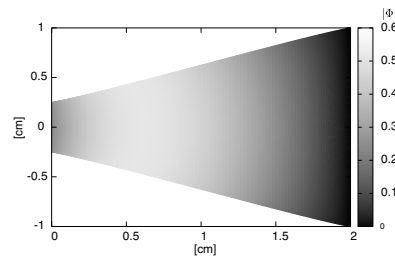


図 3.9 変形要素 1 : 8kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

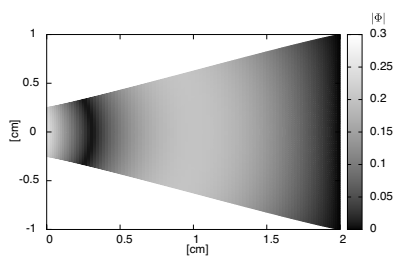


図 3.10 変形要素 1 : 10kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

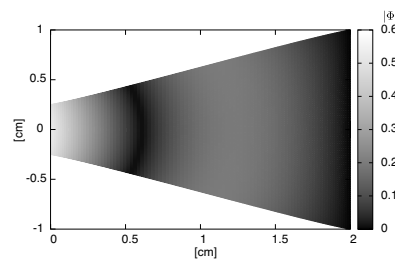


図 3.11 変形要素 1 : 12kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

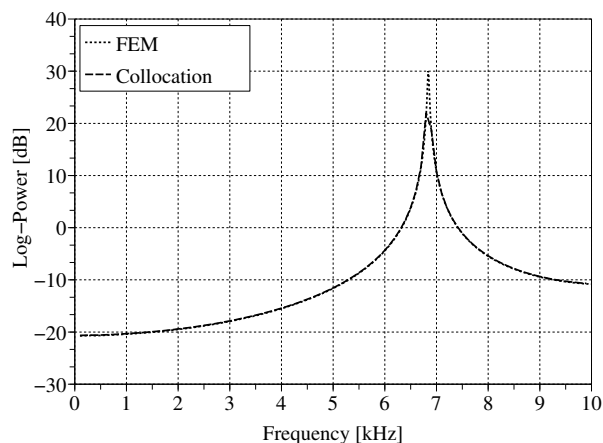


図 3.12 変形要素 1 : Chebyshev Collocation Method と FEM による体積速度伝達関数の比較.

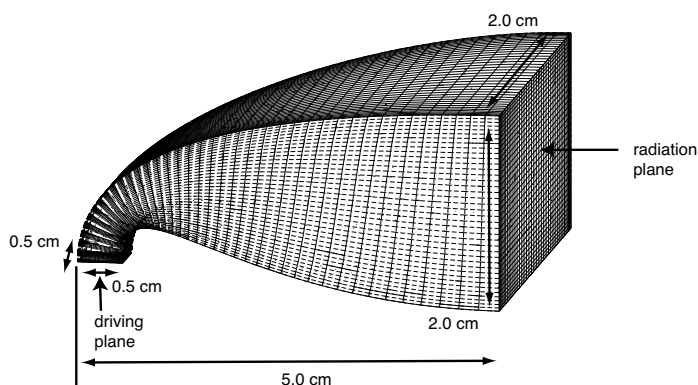


図 3.13 変形要素 2.

■曲率の大きな3次元形状における数値実験 次に、図 3.13 に示すような曲がりのあるホーンについて波動方程式を解いた。2kHz, 4kHz, 6kHz, 8kHz, 10kHz, 12kHz について解いた際の実速度ポテンシャルの絶対値の分布をそれぞれ図 3.14, 図 3.15, 図 3.16, 図 3.17, 図 3.18, 図 3.19 に示す。さらに図 3.20 に同じ形状を FEM を用いて求めた体積速度伝達関数との比較を示す。約 4 [kHz] までは両者の体積速度伝達関数がよく一致しているが、周波数が高くなるにつれて両者の差が大きくなっている。したがって、曲率の大きい形状を扱う際には、それを一つの要素として扱うことは精度の低下を招くため、細分化する必要があることがわかる。

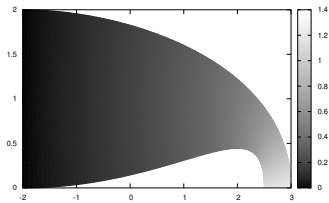


図 3.14 変形要素 2 : 2kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

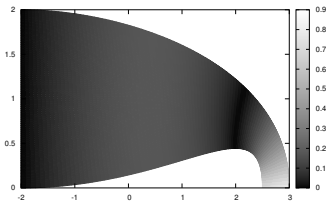


図 3.15 変形要素 2 : 4kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

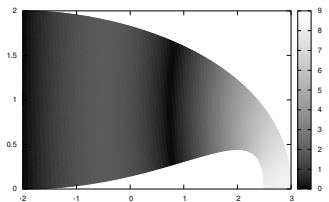


図 3.16 変形要素 2 : 6kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

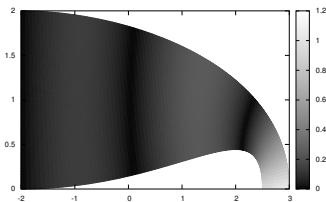


図 3.17 変形要素 2 : 8kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

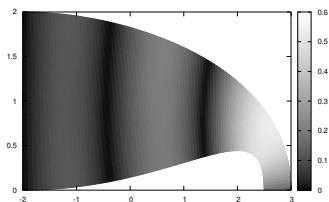


図 3.18 変形要素 2 : 10kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

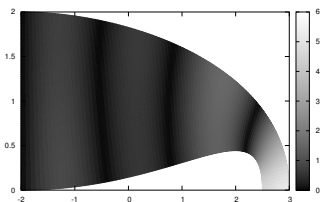


図 3.19 変形要素 2 : 12kHz における速度ポテンシャルの絶対値.

3.4 Spectral Element Method の基礎

Spectral Element Method は Spectral Method の高い精度と FEM の柔軟な領域分割特性や境界条件の取り扱いやすさを併せ持つ数値解法である。一般に Spectral Method は高精度であるが複雑な形状には適用が難しい。また、FEM は複雑な形状に対する適用度は高いが、精度が低い傾向がある。そこで、本論文では双方の長所を併せ持つ Spectral Element Method を数値解法として採用している。FEM において、ある要素サイズでは十分な精度が得られない場合、要素サイズをより小さくするという操作が行われる。しか

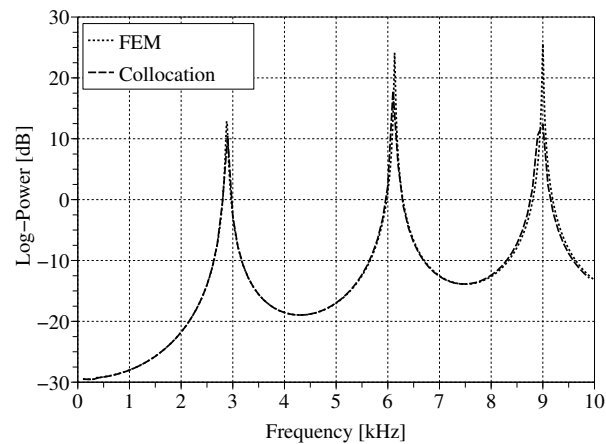


図 3.20 変形要素 2 : Chebyshev Collocation Method と FEM による体積速度伝達関数の比較.

し、Spectral Element Method では要素サイズを小さくすると同時に、各要素における解の展開次数を大きくする操作が行われる。要素のサイズを小さくする操作と各要素における解の展開次数を大きくする操作は双方ともに、解の自由度（ノードの個数に相当）を向上させるため解くべき行列が大きくなる。同じ自由度で比較した場合には、展開次数を上げる方が良い数値解の収束が得られることが過去の数値実験より示されている [c4, c7]。したがって、Spectral Element Method を用いた場合、比較的大きな要素を用いてソルバの計算コストを削減しながら高い精度が得られることが期待できる。

以下では、六面体要素およびプリズム要素における Spectral Element Method の基底関数およびノードの取り方について述べる。弱形式の導出や直接剛性法の適用については、FEM のそれと変わらないため割愛する。

3.4.1 基底関数

ここでは、Spectral Element Method において用いられる基底関数について述べる。Spectral Element Method に用いられる基底関数には大きく分けて 2 種類の関数群が存在する。一つは nodal basis と呼ばれる関数群で、node 間の値を滑らかに補間する関数群である。もう一方は modal basis と呼ばれる関数群で、これらは被近似関数をフーリエ級数のように展開し、その係数はある位置における被近似関数の値をとらない。

本研究では、Dirichlet 境界条件の扱いやすさから、nodal basis を採用する。以下では六面体要素およびプリズム要素における nodal basis について述べる。

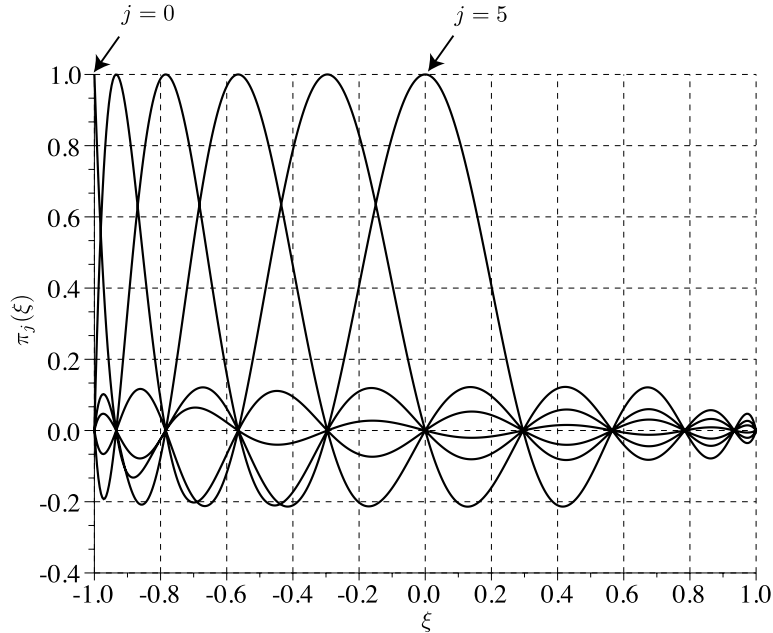


図 3.21 10 次の基底関数 $\pi_j(\xi)(j = 0, 1, \dots, 5)$.

六面体要素における基底関数

Spectral Element Method における nodal basis は Legendre 多項式に基づいている。初期の頃の Spectral Element Method では Chebyshev 多項式の類が用いられてきたが、後期になり、より高精度な数値積分が可能な Legendre 多項式の類が採用されるようになった。

区間 $[-1, 1]$ に正規化された領域 Ω_{st}^1 における nodal basis は以下のように定義される。

$$\pi_j(\xi) = \frac{-1}{N(N+1)} \frac{(1-\xi^2)L'_N(\xi)}{(\xi-\xi_j)L'_N(\xi_j)}, \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \tag{3.61}$$

ここで、 $L_N(\xi)$ は N 次の Legendre 多項式であり、Jacobi 多項式 $P_N^{\alpha, \beta}(\xi)$ を用いて $L_N(\xi) = P_N^{0,0}(\xi)$ と表せる。また、 $L'_N(\xi) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{1,1}(\xi)$ である事に注意されたい。さらに、 ξ_j は $g(\xi) = (1-\xi)(1+\xi)L'_N(\xi)$ の根であり、node の座標でもある。したがって、 $\pi_j(\xi)$ は以下の式に表される delta property を持つ。

$$\pi_j(\xi_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \tag{3.62}$$

図 3.21 に 10 次の六面体要素における基底関数 $\pi_j(\xi)(j = 0, 1, \dots, 5)$ を示す。

六面体要素の場合では、上で得られた nodal basis $\pi_j(\xi)$ のテンソル積を基底関数として

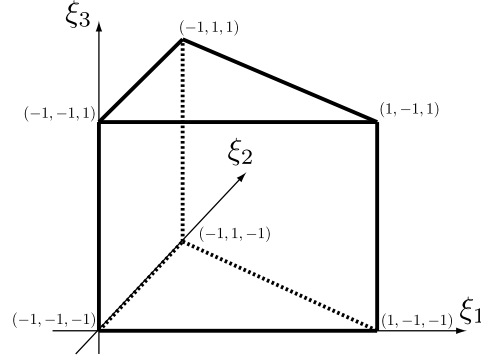


図 3.22 プリズム要素の概形.

用いる。したがって、

$$\Psi_{p(m_1, m_2, m_3)}(\boldsymbol{\xi}) = \pi_{m_1}(\xi_1)\pi_{m_2}(\xi_2)\pi_{m_3}(\xi_3) \quad (3.63)$$

である。

プリズム要素における基底関数

ここでは、図 3.22 に示すようなプリズム要素における基底関数とノードの配置について述べる。

プリズム要素の場合は六面体要素のように単純なテンソル積によって基底関数を得る事は難しい。そこで、全く異なる方法で基底関数を導出する。ここでは、文献 [c13] の方法に従う。

まず、 ξ_3 方向の展開を無視して、三角要素において以下の式のように N 次の補間多項式により、補間がなされると仮定する。以降では ${}^2\xi = [\xi_1, \xi_2]$ として扱う。

$$q_N({}^2\xi) = \sum_{k=1}^{M_N} L_k({}^2\xi)q_N({}^2\xi_k) \quad (3.64)$$

ここで、 ${}^2\xi_k$ は $M_k = (N+1)(N+2)/2$ 個の node であり、その取り方は後述する。また、 $L_k({}^2\xi)$ は多変数 Legendre 多項式である。ここでは、この $L_k({}^2\xi)$ の導出を目的として議論する。

$L_k({}^2\xi)$ は非自明である。そこで、まず三角要素において以下のような直交関数を用意する。

$$\psi_{q(m_1, m_2)}({}^2\xi) = \sqrt{\frac{(2m_1+1)(m_1+m_2+1)}{2}} P_{m_1}^{0,0}\left(\frac{2\xi_1+\xi_2+1}{1-\xi_2}\right) \left(\frac{1-\xi_2}{2}\right)^{m_1} P_{m_2}^{2m_1+1,0}(\xi_2) \quad (3.65)$$

ここで, ξ_1, ξ_2 の値域は $-1 \leq \xi_1 \leq 1; -1 \leq \xi_2 \leq 1; \xi_1 + \xi_2 \leq 0$ である. また, m_1, m_2 は $0 \leq m_1, m_2 \leq N; m_1 + m_2 \leq N$ の範囲をとる.

つぎに, $L_k(^2\xi)$ が $\psi_{k(i,j)}(^2\xi)$ の線形オペレータ \mathbf{A} で与えられるならば,

$$L_i(^2\xi) = \sum_{k=1}^{M_N} A_{ik} \psi_k(^2\xi) \quad (3.66)$$

と書ける. ここで, $L_i(^2\xi)$ は補間多項式であるから AFeuer property を有しており, 以下のように書ける.

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{M_N} A_{ik} \psi_k(^2\xi_j) \quad (3.67)$$

ここで, δ はクロネッカーのデルタ関数である. $\psi_k(\xi)$ は直交関数であるから,

$$A_{ik} = (\psi_k^{-1}(^2\xi_i))^T \quad (3.68)$$

と置けば, 式 (3.67) が満たされる.

同様に,

$$V_{jk} = \psi_k(^2\xi_j) \quad (3.69)$$

と置けば, 三角要素における Legendre 多項式は以下のように書ける.

$$L_i(^2\xi) = \sum_{k=1}^{M_N} (^2\mathbf{V}^{-1})_{ik}^T \psi_k(^2\xi) \quad (3.70)$$

ここで, \mathbf{V} は一般化 Vandermonde 行列と呼ばれる.

次に, ξ_3 方向に対応する $\pi_r(\xi_3)$ と $L_i(^2\xi)$ の積を取ることで, 基底関数を得る.

$$\Psi_{p(m_1, m_2, m_3)}(\xi) = L_{q(m_1, m_2)}([\xi_1, \xi_2]) \pi_{m_3}(\xi_3) \quad (3.71)$$

三角要素におけるノード

式 (3.70) で得られた補間関数を用いて補間を行う際に, 最適な補間点 (ノード) をどのように配置するのかについては細心の注意を払う必要がある. ここでは, Fekete Points と Lobatto grid over the triangle について述べる. 本研究では Lobatto grid over the triangle を採用した.

■Fekete Points 三角要素での補間において, Legesgue 定数を最小化するようなノードを選択することが望ましい. Legesgue 定数とは, 最大ノルムの観点から, 多項式近似が被近似関数に対してどれだけ近いかを測る尺度である. この考えに基づき, 一般化 Vandermonde 行列 \mathbf{V} の行列式を最大化することで, Legesgue 定数を最小化するノードを探索する方法が提案されており, Fekete points として知られている [c7]. 一次元において, Fekete points は Gauss-Lobatto-Legendre 積分点に相当するため, 三角要素のエッジの部分ではノードが Gauss-Lobatto-Legendre 積分点の配置と同等となる.

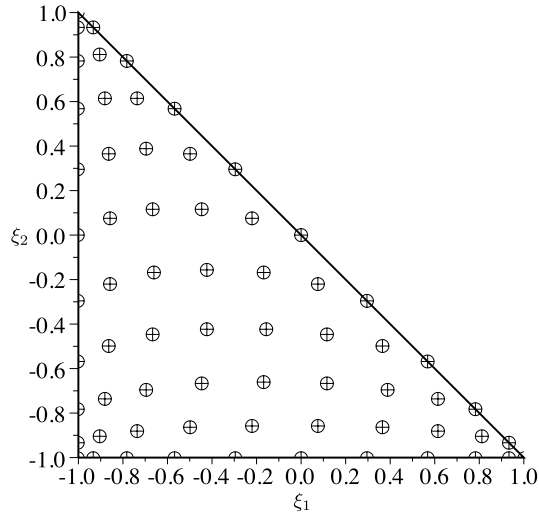


図 3.23 10 次における Lobatto grid over the triangle のノード配置.

Gauss-Lobatto-Legendre 積分点は四角要素において採用されるノードであるから、このことは三角要素と四角要素の接続部分での C^0 連続性を保つために非常に好ましい性質である。

■Lobatto grid over the triangle Fekete のノードを求めるには手計算で求めるにしろ、計算機で求めるにしろ、かなりのコストを要する。したがって、補間の精度を大きく失うこと無しに、より簡単にノードを求める方法が望まれている。そこで、本研究では Blyth らが提案した方法 [c1] を採用する。この方法では、以下の式によってノードの座標 ξ_i を得る。

$$\xi_{i,1} = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k) \tag{3.72}$$

$$\xi_{j,2} = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k) \tag{3.73}$$

ここで、 v_i は Gauss-Lobatto-Legendre 積分点である。また、 i, j, k のとる値はそれぞれ $i = 1, 2, \dots, m + 1, j = 1, 2, \dots, m + 2 - i, k = m + 3 - i - j$ である。図 3.23 に 10 次の場合のノード配置を示す。

さらに、Lobatto grid over the triangle を用いた場合の三角要素における Legendre 多項式 (4 次) を図 3.24, 図 3.25, 図 3.26, 図 3.27, 図 3.28, 図 3.29, 図 3.30, 図 3.31, 図 3.32, 図 3.33, 図 3.34, 図 3.35, 図 3.36, 図 3.37, 図 3.38, に示す。

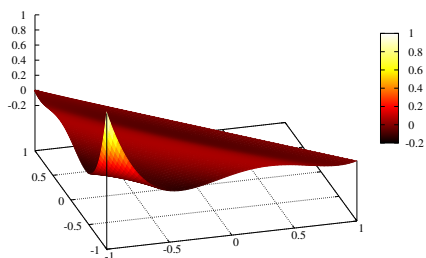


図 3.24 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,0)}([\xi_1, \xi_2])$.

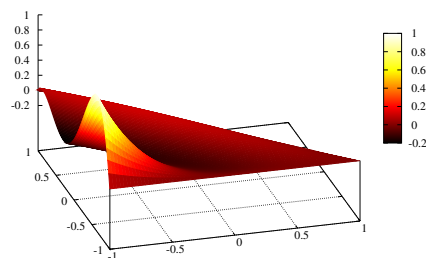


図 3.25 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,1)}([\xi_1, \xi_2])$.

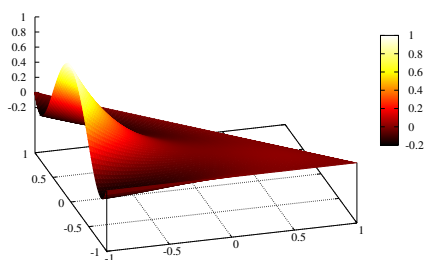


図 3.26 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,2)}([\xi_1, \xi_2])$.

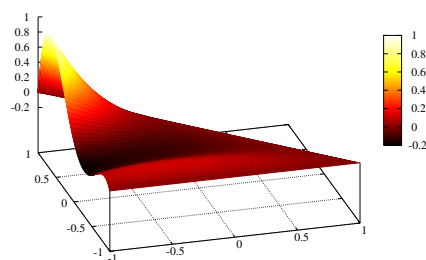


図 3.27 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,3)}([\xi_1, \xi_2])$.

Gauss-Lobatto-Legendre quadrature

node の座標 ξ_k とそれに関する重み係数 w_k は以下のように与えられる.

$$\xi_k : \xi_0 = -1, \xi_N = 1, \text{zeros of } L'_N(x), \quad (1 \leq k \leq N-1), \quad (3.74)$$

$$w_k = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L_N^2(\xi_k)}, \quad (0 \leq k \leq N). \quad (3.75)$$

Jacobi 多項式

$$P_N^{\alpha,\beta}(\xi) = \frac{(-1)^N}{2^N N!} (1-\xi)^{-\alpha} (1+\xi)^{-\beta} \frac{d^N}{d\xi^N} \left[(1-\xi)^{(\alpha+N)} (1+\xi)^{(\beta+N)} \right] \quad (3.76)$$

$$\frac{d}{d\xi} P_N^{\alpha,\beta}(\xi) = \frac{1}{2} (N + \alpha + \beta + 1) P_{N-1}^{\alpha+1,\beta+1}(\xi) \quad (3.77)$$

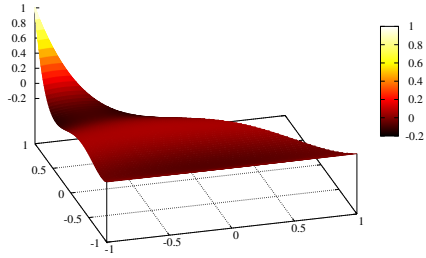


図 3.28 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,4)}([\xi_1, \xi_2])$.

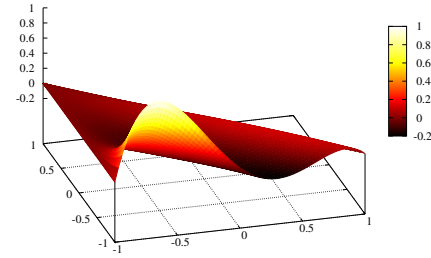


図 3.29 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,0)}([\xi_1, \xi_2])$.

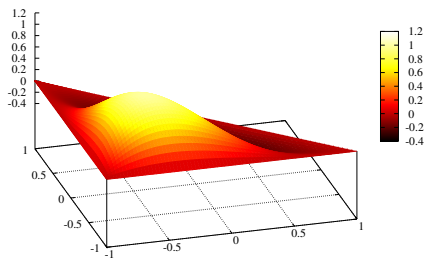


図 3.30 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,1)}([\xi_1, \xi_2])$.

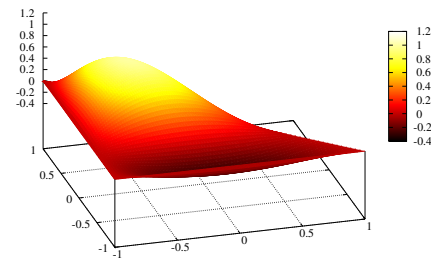


図 3.31 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,2)}([\xi_1, \xi_2])$.

Legendre 多項式

$$L_0(\xi) = 1 \tag{3.78}$$

$$L_1(\xi) = \xi \tag{3.79}$$

$$L_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \tag{3.80}$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(5\xi^2 - 3) \tag{3.81}$$

$$L_4(\xi) = \frac{1}{8}(35\xi^4 - 30\xi^2 + 3) \tag{3.82}$$

$$L_5(\xi) = \frac{1}{8}\xi(63\xi^4 - 70\xi^2 + 15) \tag{3.83}$$

$$L_6(\xi) = \frac{1}{16}(321\xi^6 - 315\xi^4 + 105\xi^2 - 5) \tag{3.84}$$

$$L_7(\xi) = \frac{1}{16}\xi(429\xi^6 - 693\xi^4 + 315\xi^2 - 35) \tag{3.85}$$

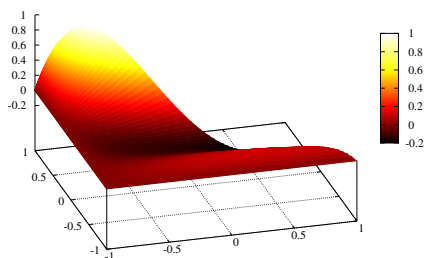


図 3.32 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,3)}([\xi_1, \xi_2])$.

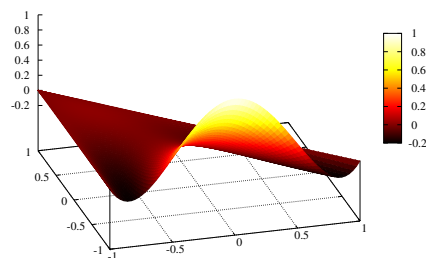


図 3.33 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,0)}([\xi_1, \xi_2])$.

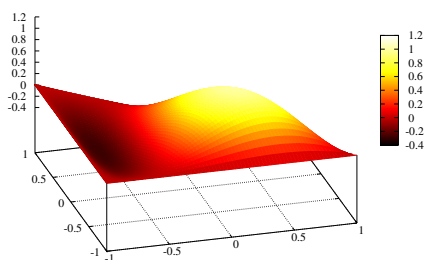


図 3.34 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,1)}([\xi_1, \xi_2])$.

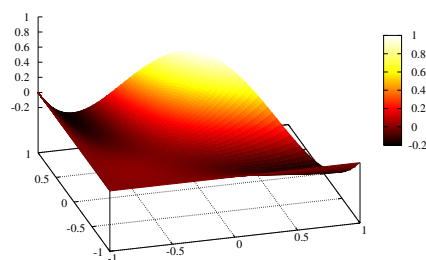


図 3.35 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,2)}([\xi_1, \xi_2])$.

$$L_8(\xi) = \frac{1}{128}(6435\xi^8 - 12012\xi^6 + 6930\xi^4 - 1260\xi^2 + 35) \quad (3.86)$$

$$L_9(\xi) = \frac{1}{128}\xi(12155\xi^8 - 25740\xi^6 + 18018\xi^4 - 4620\xi^2 + 315) \quad (3.87)$$

$$L_{10}(\xi) = \frac{1}{256}(46189\xi^{10} - 109395\xi^8 + 90090\xi^6 - 30030\xi^4 + 3465\xi^2 - 63) \quad (3.88)$$

3.5 領域分割法 (Domain Decomposition Method:DDM) の基礎

DDMでは領域 Ω をいくつかの領域 $\Omega_i, (\Omega_i \cap \Omega_j \neq \phi)$ に分割する。領域を分割する際に重複を許容するため自動メッシュ生成が容易になると考えられる。また、領域を小さく分割することにより、次数を下げるができるので実際に解く行列を小さくできる利点がある。DDMの概略を図 3.39 に示す。DDMでは対象となる領域を複数の小領域に分割し、各々の小領域において FEM などを用いて交互に数値解を求めて、全体としての数値解を収束させていく。

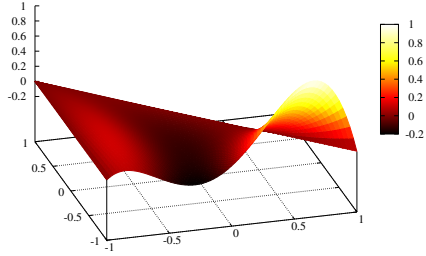


図 3.36 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(3,0)}([\xi_1, \xi_2])$.

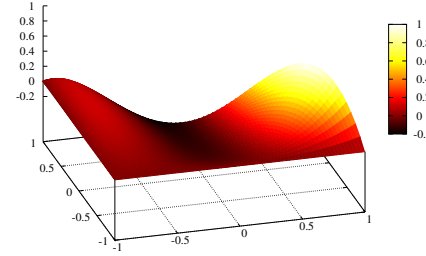


図 3.37 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(3,1)}([\xi_1, \xi_2])$.

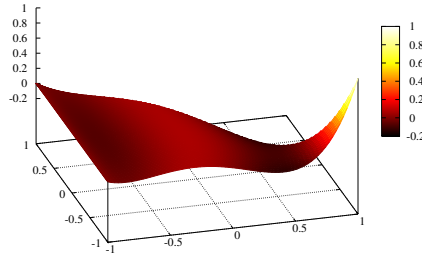


図 3.38 三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(4,0)}([\xi_1, \xi_2])$.

例として図 3.40 の上側にあるような領域を考える。領域 Ω と境界 $\partial\Omega$ における支配方程式は次式で定義されるとする。

$$L\Phi = f \text{ in } \Omega \tag{3.89}$$

$$B\Phi = g \text{ on } \partial\Omega \tag{3.90}$$

ここで、 L は Ω における微分オペレータ、 B は境界条件のオペレータである。

次に、領域 Ω とその境界 $\partial\Omega$ を図 3.40 の下側にあるように Ω_1, Ω_2 へ分割する。この際に分割後の領域 Ω_1, Ω_2 にそれぞれ人工的な境界 Γ_1, Γ_2 が生じる。この人工的な境界にもう一方の領域の値を用いて適当な境界条件を与えそれぞれの領域を独立に解くといった操作を何度か反復し、解を取束させることにより全体領域 Ω の近似解を得る。式 (5.17) で与えられる Helmholtz 方程式の場合では境界 Γ_1, Γ_2 に対して次式のような境界条件を与えることで安定に解が取束することが知られている [d2]。

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} + j\frac{\omega}{c} \right] \Phi_1(\mathbf{x}, \omega) = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} + j\frac{\omega}{c} \right] \Phi_2(\mathbf{x}, \omega) \text{ on } \Gamma_1 \tag{3.91}$$

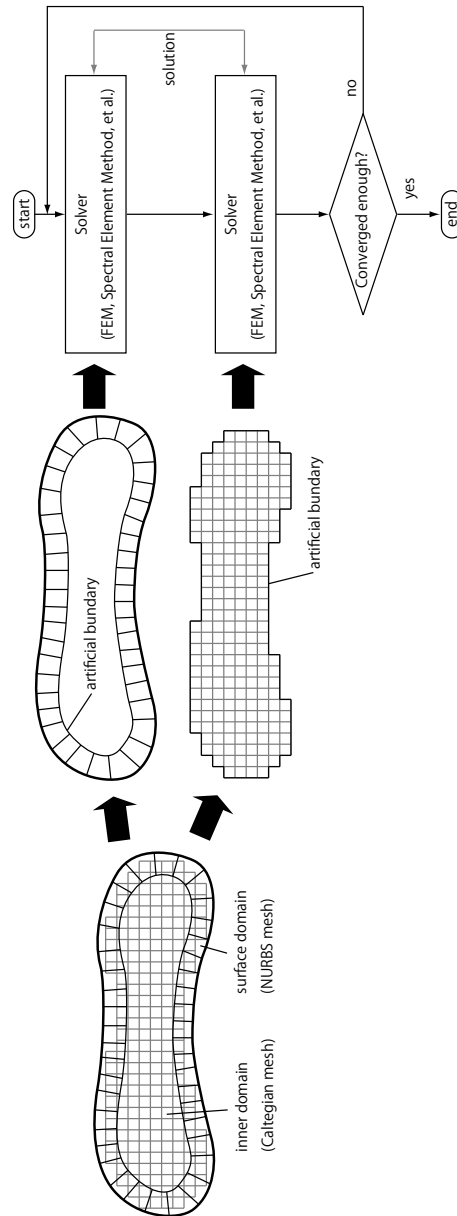


図 3.39 DDM の概略.

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} + j\frac{\omega}{c} \right] \Phi_2(\mathbf{x}, \omega) = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} + j\frac{\omega}{c} \right] \Phi_1(\mathbf{x}, \omega) \text{ on } \Gamma_2 \quad (3.92)$$

ここで、 \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 はそれぞれ Γ_1 、 Γ_2 における法線ベクトルである。

従来からよく用いられてきた FEM では、複雑な形状においてメッシュを生成する際に多大な労力と時間を必要とする。そのため、形状が時間とともに変化するようなモデルを扱うことは難しい。そこで、DDM を用いることによりメッシュ生成時の拘束条件が緩和

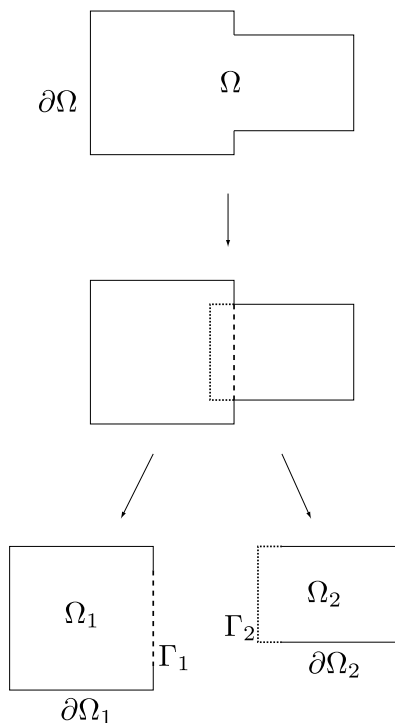


図 3.40 領域分割の例.

され、より高速なメッシュの生成が期待できる。

3.6 正規化座標系から実座標系への写像について

FEM をはじめとする数値解法において、数値解や重み関数の基底関数は区間 $[-1, 1]$ もしくは区間 $[0, 1]$ の正規化座標系において定義されている。また、積分を必要とする数値解法の場合、区間 $[-1, 1]$ で定義された数値積分法を用いるのが普通である。しかし、実際の問題を解く際には形状が区間 $[-1, 1]$ で定義されていないことが普通である。そのため、図 3.41 に示すように実際の問題を定義する実座標系と計算機上で解くための正規化座標系をある写像関数により関係付ける方法が一般に用いられる。ここでは写像関数が正規化座標系から実座標系への方向にのみ定義されていると仮定して、曲面を持った写像関数について論じる。そして、積分の係数変換について述べる。

以降の議論において、正規化座標系 ξ から実空間の座標系 x への写像が以下の関数 $\mathbf{X}(\xi)$ によって行われるとする。つまり、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \chi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

とする。

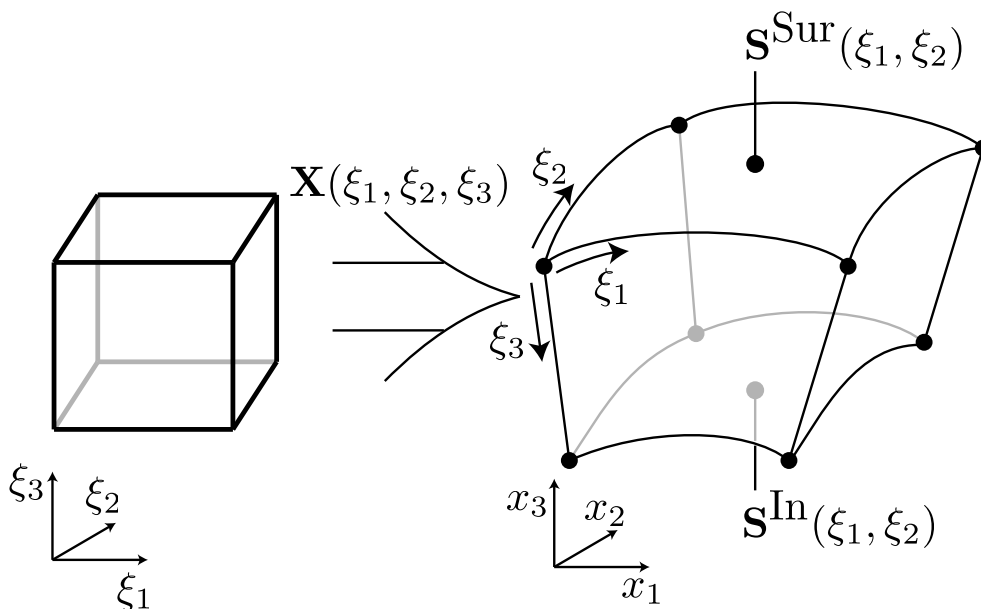


図 3.41 正規化座標系から実座標系への写像.

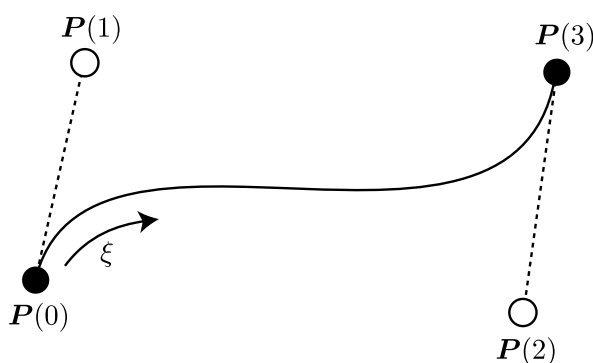


図 3.42 Bézier 曲線.

3.6.1 Bézier 曲線を用いた変形要素

本節では 3 次の Bézier 曲線を用いた変形要素について述べる。Bézier 曲線は区間 $[0, 1]$ で定義されるパラメトリック曲線であるが、曲線の両端においてその微分値を定義できることから、複数の曲線を接続した際にその接点において C^1 連続性を保証することができる。そのため、滑らかな声道形状を近似するのに適していると考えられる。

3 次の Bézier 曲線は次式で定義される。

$$\mathbf{X}(\xi) = (1 - \xi)^3 \mathbf{P}(0) + \xi^3 \mathbf{P}(3) + 3(1 - \xi)^2 \xi \mathbf{P}(1) + 3(1 - \xi) \xi^2 \mathbf{P}(2) \quad (3.94)$$

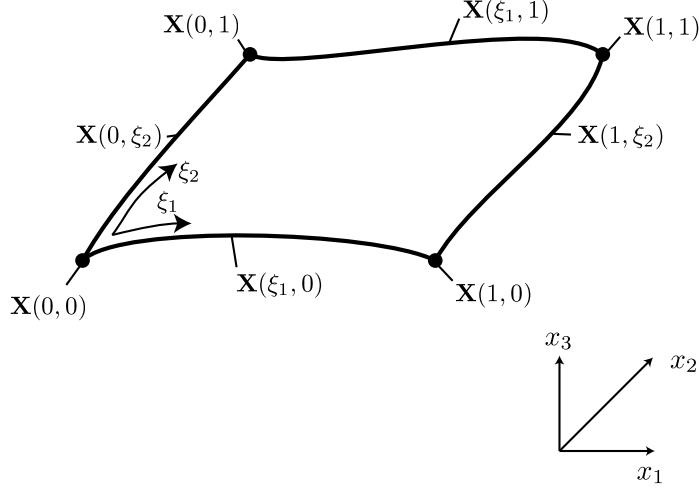


図 3.43 Bézier 曲線を 4 辺にもつ曲面の例.

ここで、 $\mathbf{X}(\xi)$ は補間された 3 次元座標を表すベクトルであり、 $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(3)$ はそれぞれ $\xi = 0$, $\xi = 1$ のときの $\mathbf{X}(\xi)$ の 3 次元座標を表すベクトルである。また、 $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}(2)$ はそれぞれコントロールポイントの 3 次元座標を表すベクトルであり、線分 $\mathbf{P}(0)-\mathbf{P}(1)$ 、線分 $\mathbf{P}(3)-\mathbf{P}(2)$ はそれぞれ $\xi = 0$, $\xi = 1$ のときの曲線 $\mathbf{X}(\xi)$ の接線となる。この様子を図 3.42 に示す。

次に、図 3.43 のように、Bézier 曲線 $\mathbf{X}(\xi_1, 0)$, $\mathbf{X}(\xi_1, 1)$, $\mathbf{X}(0, \xi_2)$, $\mathbf{X}(1, \xi_2)$ を 4 辺にもつ曲面を考える。この曲面上の点 $\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2)$ は次式で与えられる [c7]。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2) = & (1 - \xi_1)\mathbf{X}(0, \xi_2) + \xi_1\mathbf{X}(1, \xi_2) \\ & + (1 - \xi_2)\mathbf{X}(\xi_1, 0) + \xi_2\mathbf{X}(\xi_1, 1) \\ & - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\mathbf{X}(0, 0) - \xi_1(1 - \xi_2)\mathbf{X}(1, 0) \\ & - (1 - \xi_1)\xi_2\mathbf{X}(0, 1) - \xi_1\xi_2\mathbf{X}(1, 1) \end{aligned} \quad (3.95)$$

さらに、図 3.44 に示すように、Bézier 曲線を 4 辺にもつ曲面 $\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, 0)$, $\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, 1)$, $\mathbf{X}(\xi_1, 0, \xi_3)$, $\mathbf{X}(\xi_1, 1, \xi_3)$, $\mathbf{X}(0, \xi_2, \xi_3)$, $\mathbf{X}(1, \xi_2, \xi_3)$ からなる 6 面体を考える。この直方体の内部の点 $\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は次式で与えられる [c14]。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & (1 - \xi_1)\mathbf{X}(0, \xi_2, \xi_3) + \xi_1\mathbf{X}(1, \xi_2, \xi_3) \\ & + (1 - \xi_2)\mathbf{X}(\xi_1, 0, \xi_3) + \xi_2\mathbf{X}(\xi_1, 1, \xi_3) \\ & + (1 - \xi_3)\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, 0) + \xi_3\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, 1) \\ & - (1 - \xi_1)(1 - \xi_3)\mathbf{X}(0, \xi_2, 0) - (1 - \xi_1)\xi_3\mathbf{X}(0, \xi_2, 1) \\ & - \xi_1(1 - \xi_3)\mathbf{X}(1, \xi_2, 0) - \xi_1\xi_3\mathbf{X}(1, \xi_2, 1) \\ & - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\mathbf{X}(0, 0, \xi_3) - (1 - \xi_1)\xi_2\mathbf{X}(0, 1, \xi_3) \\ & - \xi_1(1 - \xi_2)\mathbf{X}(1, 0, \xi_3) - \xi_1\xi_2\mathbf{X}(1, 1, \xi_3) \\ & - (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{X}(\xi_1, 0, 0) - (1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{X}(\xi_1, 0, 1) \\ & - \xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{X}(\xi_1, 1, 0) - \xi_2\xi_3\mathbf{X}(\xi_1, 1, 1) \end{aligned}$$

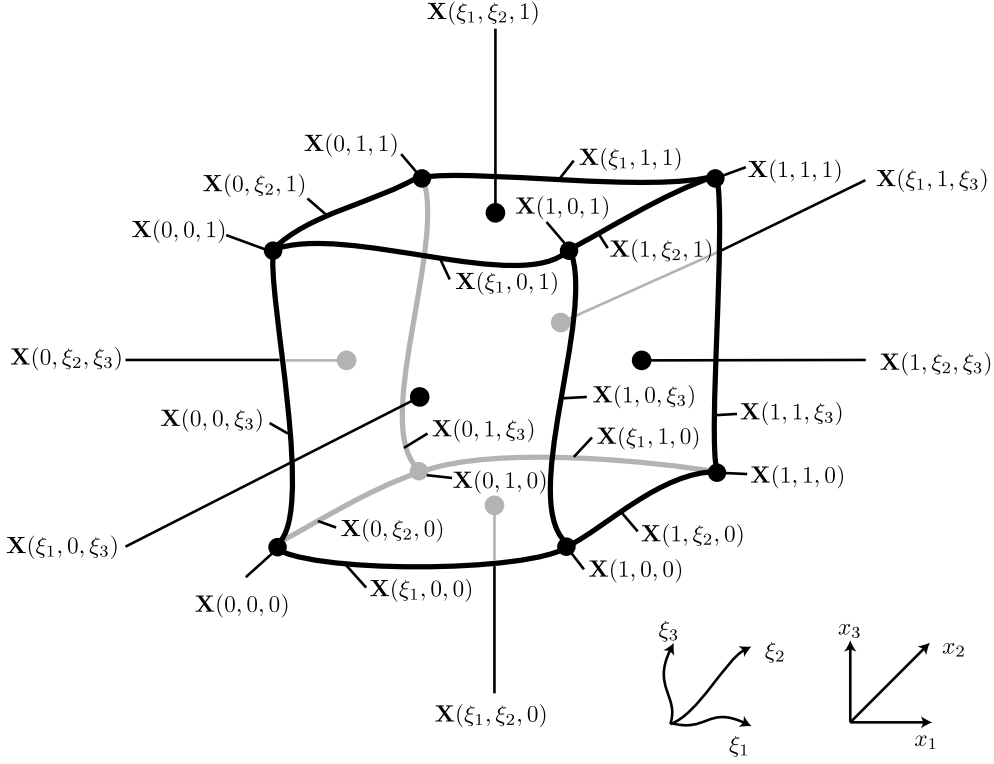


図 3.44 Bézier 曲線を 4 辺にもつ曲面からなる 6 面体.

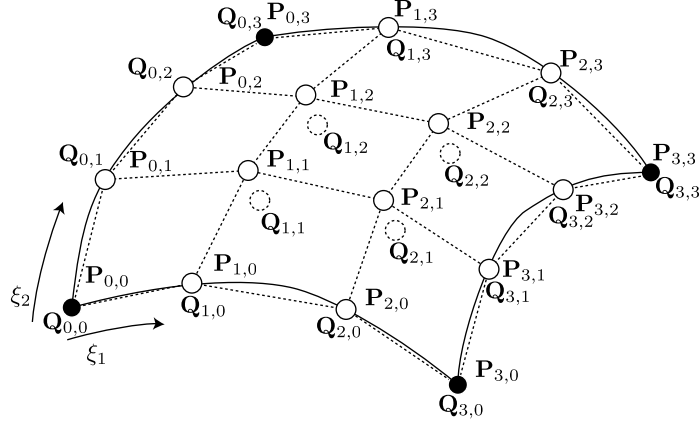
$$\begin{aligned}
 &+(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{X}(0, 0, 0) + (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{X}(0, 0, 1) \\
 &+(1 - \xi_1)\xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{X}(0, 1, 0) + (1 - \xi_1)\xi_2\xi_3\mathbf{X}(0, 1, 1) \\
 &+\xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{X}(1, 0, 0) + \xi_1(1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{X}(1, 0, 1) \\
 &+\xi_1\xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{X}(1, 1, 0) + \xi_1\xi_2\xi_3\mathbf{X}(1, 1, 1)
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

3.6.2 Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) の基礎

ここでは、NURBS 曲面を用いて表面形状の近似を行う方法について述べる。NURBS は一つの表現系で点から直線、Bézier 曲線、スプラインなどを包括して表現でき、曲線や曲面の分割や穴あけ等が良い精度で行えるため、近年、コンピュータ支援設計 (Cocomputer Aided Design:CAD) において注目されている。本研究では声道の滑らかな表面を精度よく近似するために声道表面の表現に NURBS を用いる。以下に NURBS 曲面による補間の方法を述べる。

NURBS 曲面は以下の式によって定義されるパラメトリック曲面である。

$$\mathbf{S}(\xi) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,K^{(1)}}(\xi_1)N_{j,K^{(2)}}(\xi_2)w_{i,j}} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,K^{(1)}}(\xi_1)N_{j,K^{(2)}}(\xi_2)w_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}. \tag{3.97}$$


 図 3.45 NURBS Surface $S(\xi)$.

ここで, \mathbf{P} , w , $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, m , n はそれぞれ, コントロールポイントの座標 $[p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}]^T$, コントロールポイントに対する重み, ξ_1 方向の次数+1, ξ_2 方向の次数+1, ξ_1 方向のコントロールポイントの個数, ξ_2 方向のコントロールポイントの個数である. 図 3.45 に NURB 曲面の概念図を示す.

また, $N_{i,K}(x)$ は B-spline の基底関数であり, 以下の式により定義される.

$$N_{i,K}(x) = \frac{x - q_i}{q_{i+K-1} - q_i} N_{i,K-1}(x) + \frac{q_{i+K} - x}{q_{i+K} - q_{i+1}} N_{i+1,K-1}(x), \quad (3.98)$$

ただし,

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & (q_i \leq x < q_{i+1}) \\ 0 & (x < q_i, q_{i+1} \leq x) \end{cases} \quad (3.99)$$

である.

$$\begin{aligned} q_0 &= q_1 = \cdots = q_{K-1} = x_0, \\ q_{i+K} &= (x_i + x_{i+K})/2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1-K), \\ q_n &= q_{n+1} = \cdots = q_{n+K-1} = x_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

ここで, $x_i = i/(N-1)$ とする.

以下では簡単のために,

$$B_{i,j}(\xi) = \frac{N_{i,K^{(1)}}(\xi_1) N_{j,K^{(2)}}(\xi_2) w_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} N_{i,K^{(1)}}(\xi_1) N_{j,K^{(2)}}(\xi_2) w_{i,j}} \quad (3.101)$$

として, 以下のように書き直す.

$$\mathbf{S}(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} B_{i,j}(\xi) \mathbf{P}_{i,j}. \quad (3.102)$$

いま, 図 3.45 に示すように, 補間対象の曲面 S 上に補間点 $\mathbf{Q} = [q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}]^T$ が整列している場合を考える. このとき, 全ての補間点 \mathbf{Q} を通過するように, コントロール

ポイント $\mathbf{P} = [p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}]^T$ の位置を決定する必要がある。そのために、行列 \mathbf{A} 、ベクトル \mathbf{x} 、 \mathbf{b} を以下のように定義する。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_{0,0}(\xi_{0,0}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{0,0}) & B_{1,0}(\xi_{0,0}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{0,0}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{0,0}) \\ B_{0,0}(\xi_{0,1}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{0,1}) & B_{1,0}(\xi_{0,1}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{0,1}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{0,1}) \\ \vdots & & & & & & & \\ B_{0,0}(\xi_{0,n-1}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{0,n-1}) & B_{1,0}(\xi_{0,n-1}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{0,n-1}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{0,n-1}) \\ B_{0,0}(\xi_{1,0}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{1,0}) & B_{1,0}(\xi_{1,0}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{1,0}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{1,0}) \\ \vdots & & & & & & & \\ B_{0,0}(\xi_{1,n-1}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{1,n-1}) & B_{1,0}(\xi_{1,n-1}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{1,n-1}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{1,n-1}) \\ \vdots & & & & & & & \\ B_{0,0}(\xi_{m-1,n-1}) & \cdots & B_{0,n-1}(\xi_{m-1,n-1}) & B_{1,0}(\xi_{m-1,n-1}) & \cdots & B_{1,n-1}(\xi_{m-1,n-1}) & \cdots & B_{m-1,n-1}(\xi_{m-1,n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_{0,0}^{(1)} & p_{0,0}^{(2)} & p_{0,0}^{(3)} \\ \vdots & & \\ p_{0,n-1}^{(1)} & p_{0,n-1}^{(2)} & p_{0,n-1}^{(3)} \\ p_{1,0}^{(1)} & p_{1,0}^{(2)} & p_{1,0}^{(3)} \\ \vdots & & \\ p_{1,n-1}^{(1)} & p_{1,n-1}^{(2)} & p_{1,n-1}^{(3)} \\ \vdots & & \\ p_{m-1,n-1}^{(1)} & p_{m-1,n-1}^{(2)} & p_{m-1,n-1}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_{0,0}^{(1)} & q_{0,0}^{(2)} & q_{0,0}^{(3)} \\ \vdots & & \\ q_{0,n-1}^{(1)} & q_{0,n-1}^{(2)} & q_{0,n-1}^{(3)} \\ q_{1,0}^{(1)} & q_{1,0}^{(2)} & q_{1,0}^{(3)} \\ \vdots & & \\ q_{1,n-1}^{(1)} & q_{1,n-1}^{(2)} & q_{1,n-1}^{(3)} \\ \vdots & & \\ q_{m-1,n-1}^{(1)} & q_{m-1,n-1}^{(2)} & q_{m-1,n-1}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

以上の行列 \mathbf{A} 、ベクトル \mathbf{x} 、 \mathbf{b} を用いて、

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.106)$$

を \mathbf{x} について解くことにより、係数 \mathbf{P} が得られる。

3.6.3 NURBS 曲面を用いた変形要素

ここでは図 3.46 に示すように、2つの NURBS 曲面 ($\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2)$, $\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2)$) 間を線形補間を用いて表現されるような変形要素について、写像関数および微分オペレータの導出方法について述べる。

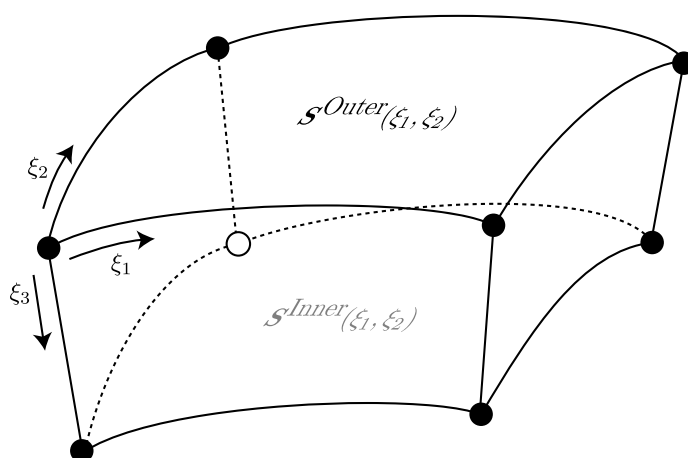


図 3.46 NURBS 曲面を用いた変形要素.

点

$$P_1 = \mathbf{X}(0, 0, 0) = \mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 0) \quad (3.107)$$

$$P_2 = \mathbf{X}(1, 0, 0) = \mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 0) \quad (3.108)$$

$$P_3 = \mathbf{X}(1, 1, 0) = \mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 1) \quad (3.109)$$

$$P_4 = \mathbf{X}(0, 1, 0) = \mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 1) \quad (3.110)$$

$$P_5 = \mathbf{X}(0, 0, 1) = \mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 0) \quad (3.111)$$

$$P_6 = \mathbf{X}(1, 0, 1) = \mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 0) \quad (3.112)$$

$$P_7 = \mathbf{X}(1, 1, 1) = \mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 1) \quad (3.113)$$

$$P_8 = \mathbf{X}(0, 1, 1) = \mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 1) \quad (3.114)$$

線分

$$\mathbf{X}(0, 0, \xi_3) = (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 0) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 0) \quad (3.115)$$

$$\mathbf{X}(1, 0, \xi_3) = (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 0) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 0) \quad (3.116)$$

$$\mathbf{X}(0, 1, \xi_3) = (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 1) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 1) \quad (3.117)$$

$$\mathbf{X}(1, 1, \xi_3) = (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 1) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 1) \quad (3.118)$$

面の近似

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\xi_1, 0, \xi_3) &= (1 - \xi_1)\mathbf{X}(0, 0, \xi_3) + \xi_1\mathbf{X}(1, 0, \xi_3) + (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 0) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 0) \\
&\quad - (1 - \xi_1)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 0) - \xi_1(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 0) \\
&\quad - (1 - \xi_1)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 0) - \xi_1\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 0) \\
&= (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 0) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 0)
\end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\xi_1, 1, \xi_3) &= (1 - \xi_1)\mathbf{X}(0, 1, \xi_3) + \xi_1\mathbf{X}(1, 1, \xi_3) + (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 1) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 1) \\
&\quad - (1 - \xi_1)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 1) - \xi_1(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 1) \\
&\quad - (1 - \xi_1)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 1) - \xi_1\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 1) \\
&= (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 1) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 1)
\end{aligned} \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(0, \xi_2, \xi_3) &= (1 - \xi_2)\mathbf{X}(0, 0, \xi_3) + \xi_2\mathbf{X}(0, 1, \xi_3) + (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, \xi_2) \\
&\quad - (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 0) - \xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 1) \\
&\quad - (1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 0) - \xi_2\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 1) \\
&= (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, \xi_2)
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(1, \xi_2, \xi_3) &= (1 - \xi_2)\mathbf{X}(1, 0, \xi_3) + \xi_2\mathbf{X}(1, 1, \xi_3) + (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, \xi_2) \\
&\quad - (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 0) - \xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 1) \\
&\quad - (1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 0) - \xi_2\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 1) \\
&= (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{3.122}$$

内部の近似

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= (1 - \xi_1)\mathbf{X}(0, \xi_2, \xi_3) + \xi_1\mathbf{X}(1, \xi_2, \xi_3) \\
&\quad + (1 - \xi_2)\mathbf{X}(\xi_1, 0, \xi_3) + \xi_2\mathbf{X}(\xi_1, 1, \xi_3) \\
&\quad + (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2) \\
&\quad - (1 - \xi_1)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, \xi_2) - (1 - \xi_1)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, \xi_2) \\
&\quad - \xi_1(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, \xi_2) - \xi_1\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, \xi_2) \\
&\quad - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\mathbf{X}(0, 0, \xi_3) - (1 - \xi_1)\xi_2\mathbf{X}(0, 1, \xi_3) \\
&\quad - \xi_1(1 - \xi_2)\mathbf{X}(1, 0, \xi_3) - \xi_1\xi_2\mathbf{X}(1, 1, \xi_3) \\
&\quad - (1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 0) - (1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 0) \\
&\quad - \xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, 1) - \xi_2\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, 1) \\
&\quad + (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 0) + (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 0) \\
&\quad + (1 - \xi_1)\xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(0, 1) + (1 - \xi_1)\xi_2\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(0, 1) \\
&\quad + \xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 0) + \xi_1(1 - \xi_2)\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 0) \\
&\quad + \xi_1\xi_2(1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(1, 1) + \xi_1\xi_2\xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(1, 1) \\
&= (1 - \xi_3)\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3\mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

微分値（一階）

次に微分オペレータの変換を行う。伝搬方程式には2階微分オペレータまで考慮する必要がある。

■内部

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_1} = (1 - \xi_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2) \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_2} = (1 - \xi_3) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2) \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_3} = -\mathbf{S}^{\text{Outer}}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 + \mathbf{S}^{\text{Inner}}(\xi_1, \xi_2) \quad (3.126)$$

実座標系から正規化座標系への微分オペレータの変換

■一階微分オペレータ（二次元） 正規化座標系を (ξ_1, ξ_2) 、実座標系を (x_1, x_2) として、正規化座標系から実座標系への写像関数を以下のように定義する。

$$\begin{cases} x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2) \\ x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (3.127)$$

この場合、一階微分オペレータ $\partial/\partial x_n$ ($n = 1, 2$) は

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (3.128)$$

となる。ここで、 $\chi_1(\xi_1, \xi_2)$ 、 $\chi_2(\xi_1, \xi_2)$ が複雑な式の場合 $\partial \xi_1/\partial x_n$ 、 $\partial \xi_2/\partial x_n$ は容易に求まらない。そのため、以下のように方程式を解く必要がある。

■ $\partial \xi_1/\partial x_n$ 、 $\partial \xi_2/\partial x_n$ の計算法

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = 1 \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = 0 \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = 0 \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = 1 \quad (3.132)$$

であるから、これを行列で表すと、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

となる。したがって、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.134)$$

■二階微分オペレータ（二次元） 二階微分オペレータ $\partial^2/\partial x_n^2$ ($n = 1, 2$) は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\
 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

となる。

■ $\partial^2 \xi_1 / \partial x_n^2$, $\partial^2 \xi_2 / \partial x_n^2$ の計算法

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} \\
 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2^2} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2^2} \\
 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}
 \end{aligned}$$

■一階微分オペレータ (3次元) 正規化座標系を (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , 実座標系を (x_1, x_2, x_3) として, 正規化座標系から実座標系への写像関数を以下のように定義する.

$$\begin{cases} x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ x_3 = \chi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{cases} \quad (3.142)$$

この場合, 一階微分オペレータ $\partial/\partial x_n$ ($n = 1, 2, 3$) は

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (3.143)$$

となる. ここで, $\chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\chi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ が複雑な式るとき $\partial \xi_1/\partial x_n$, $\partial \xi_2/\partial x_n$, $\partial \xi_3/\partial x_n$ は容易に求まらない. そのため, 以下のように方程式を解く必要がある.

■ $\partial \xi_1/\partial x_n$, $\partial \xi_2/\partial x_n$, $\partial \xi_3/\partial x_n$ の計算法

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} = 1 \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} = 0 \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} = 0 \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} = 0 \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} = 1 \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} = 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} = 0 \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} = 0 \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} = 1 \quad (3.152)$$

であるから, これを行列形式で書くと

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

となる. したがって,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.154)$$

である.

■二階微分オペレータ (3次元) 二階微分オペレータ $\partial^2/\partial x_n^2$ ($n = 1, 2, 3$) は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) \\
&= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \right) \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2} \right) \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\
&= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2} + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_3} \\
&\quad + 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} + 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \\
&\quad + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial}{\partial \xi_3}
\end{aligned} \tag{3.155}$$

■ $\partial^2 \xi_1/\partial x_n^2$, $\partial^2 \xi_2/\partial x_n^2$, $\partial^2 \xi_3/\partial x_n^2$ の計算法

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_1^2} \\
&= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_3^2} \\
&\quad + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} + 2 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_3} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_1^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.156}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_2^2}
\end{aligned}$$

3.6.4 積分の係数変換

ここでは、3次元空間において実座標系での積分を正規座標系での積分へ Jacobian を用いて係数変換する方法について述べる。

まず、実座標系、正規化座標系での要素内部の重積分の積分範囲をそれぞれ Ω_e , Ω_{st} とすると、積分の係数変換は Jacobian $J_D(\boldsymbol{\xi})$ を用いて以下のように書ける。

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{st}} f(\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}))|J_D(\boldsymbol{\xi})|d\boldsymbol{\xi}. \quad (3.166)$$

ここで、 $f(\mathbf{x})$ は被積分関数である。また $\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi})$ は以下の式で表されるような、正規化座標系 $\boldsymbol{\xi}$ から実座標系 \mathbf{x} への写像関数である。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \chi_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \chi_2(\boldsymbol{\xi}) \\ \chi_3(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}. \quad (3.167)$$

Jacobian $J_D(\boldsymbol{\xi})$ は以下の式で定義される。

$$J_D(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

次に、要素表面の積分について考える。実座標系および正規化座標系の要素表面での積分範囲をそれぞれ Γ_e , Γ_{st} とすれば、積分素 $|J_S(\boldsymbol{\xi}^{(2)})|$ を用いて、以下のように書ける。

$$\int_{\Gamma_e} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_{st}} f(\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}))|J_S(\boldsymbol{\xi}^{(2)})|d\boldsymbol{\xi}^{(2)}. \quad (3.169)$$

ただし、積分する面によって、 $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ を使い分ける必要があることに注意されたい。つまり、六面体の場合では正規化座標系において $\xi_1 = -1$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = -1$, $\xi_3 = 1$ となる6つの面があり、それぞれの面において $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ は、

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ -1 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 1 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

と置き換えて考える必要がある。さらに、積分素 $|J_S(\boldsymbol{\xi}^{(2)})|$ は、面を表現する写像関数における面積分に用いる2つの変数 ξ_m , ξ_n 方向の微分係数の外積の長さである。したがって、 $\mathbf{S}(\xi_m, \xi_n)$ を積分する面を表現する正規化座標系から実座標系への写像関数とすれば、つまり、

$$\mathbf{S}(\xi_m, \xi_n) = \begin{cases} \mathbf{X}([-1, \xi_2, \xi_3]^T) & (\xi_1 = -1 \text{ の面, } m=2, n=3), \\ \mathbf{X}([1, \xi_2, \xi_3]^T) & (\xi_1 = 1 \text{ の面, } m=2, n=3), \\ \mathbf{X}([\xi_1, -1, \xi_3]^T) & (\xi_2 = -1 \text{ の面, } m=1, n=3), \\ \mathbf{X}([\xi_1, 1, \xi_3]^T) & (\xi_2 = 1 \text{ の面, } m=1, n=3), \\ \mathbf{X}([\xi_1, \xi_2, -1]^T) & (\xi_3 = -1 \text{ の面, } m=1, n=2), \\ \mathbf{X}([\xi_1, \xi_2, 1]^T) & (\xi_3 = 1 \text{ の面, } m=1, n=2), \end{cases} \quad (3.171)$$

とすれば, $|J_S(\boldsymbol{\xi}^{(2)})|$ は

$$|J_S(\boldsymbol{\xi}^{(2)})| = \left| \frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_m} \times \frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_n} \right| \quad (3.172)$$

である. ここで, “ \times ” は外積を表す. $\frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_m} \times \frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_n}$ をより具体的に書けば,

$$\frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_m} \times \frac{\partial \mathcal{S}(\xi_m, \xi_n)}{\partial \xi_n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_n} \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \quad (3.173)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_m} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \quad (3.174)$$

である. ここで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は実座標系の基底ベクトルである.

3.7 数値積分

ここまでで扱ってきた積分を計算機上で行う際には, 解析解が求まる場合を除いて数値積分を用いて近似値を得る方法が用いられる. ここでは特にガウス求積について述べる. ガウス求積では一般的に区間 $[-1, 1]$ で定義され, $N + 1$ 個の評価点 ξ_i と重み w_i を用いて以下のように積分が近似される.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^N f(\xi_i) w_i \quad (3.175)$$

ここで, 被積分関数 $f(\xi)$ の次数が $2N + 1$ 次以下かつ連続であれば, 積分値が正確に求まることが知られている.

評価点 ξ_i と重み w_i の取り方については種々の方法があり, ここでは一般的な Gauss-Legendre の方法と Gauss-Lobatto-Legendre の方法を述べる.

3.7.1 Gauss-Legendre quadrature

評価点 ξ_i とそれに対応する重み w_i は以下のように与えられる.

$$\xi_i : \text{zeros of } L_{N+1}(\xi), \quad (0 \leq i \leq N), \quad (3.176)$$

$$w_i = \frac{2}{1 - \xi_i^2} \frac{1}{[L'_{N+1}(\xi_i)]^2}, \quad (0 \leq i \leq N). \quad (3.177)$$

ここで, $L_N(\xi)$ は N 次の Legendre 多項式である.

3.7.2 Gauss-Lobatto-Legendre quadrature

評価点 x_i とそれに対応する重み w_i は以下のように与えられる.

$$\xi_i : \xi_0 = -1, \xi_{N-1} = 1, \text{zeros of } L'_N(\xi), \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad (3.178)$$

$$w_i = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L_N^2(\xi_i)}, \quad (0 \leq i \leq N). \quad (3.179)$$

表 3.3 数値積分の各評価点数における座標と重み 1/2.

個数 $N + 1$	Gauss-Legendre quadrature		Gauss-Lobatto-Legendre quadrature	
	ξ_i	w_i	ξ_i	w_i
3	± 0.7745966692414833	0.5555555555555556	± 1.0000000000000000	0.3333333333333333
	0.0000000000000000	0.8888888888888888	0.0000000000000000	1.3333333333333334
5	± 0.9061798459386639	0.2369268850561894	± 1.0000000000000000	0.1000000000000000
	± 0.5384693101056830	0.4786286704993661	± 0.6546536707079771	0.5444444444444444
	0.0000000000000000	0.5688888888888889	0.0000000000000000	0.7111111111111112
7	± 0.9491079151630402	0.1294849591805746	± 1.0000000000000000	0.04761904761904760
	± 0.7415311634540558	0.2797054118974208	± 0.8302238962785670	0.27682604736156720
	± 0.4058451354503632	0.381830056414725	± 0.4688487934707143	0.43174538120986260
	0.0000000000000000	0.4179591836734694	0.0000000000000000	0.48761904761904760
9	± 0.9681602418422699	0.08127438249907491	± 1.0000000000000000	0.02777777777777778
	± 0.8360311090946198	0.1806481589211639	± 0.8997579954114599	0.16549536156080560
	± 0.4058451354503632	0.2606106815759569	± 0.6771862795107380	0.27453871250016082
	± 0.6133714616298676	0.3123470800512278	± 0.3631174638261779	0.34642851097304617
	0.0000000000000000	0.3302393550012598	0.0000000000000000	0.37151927437641724
11	± 0.9782286584377289	0.05566856636223136	± 1.0000000000000000	0.01818181818193368
	± 0.8870625793933868	0.1255803907623658	± 0.9340014304081505	0.10961227326700096
	± 0.7301519811153412	0.1862902251814719	± 0.7844834736631086	0.18716988178030933
	± 0.5190961062908173	0.2331937721864709	± 0.5652353269962047	0.24804810426402857
	± 0.2695431411266327	0.2628045467752371	± 0.2957581355869393	0.28687912477900834
	0.0000000000000000	0.2729250867779006	0.0000000000000000	0.30021759545569066
13	± 0.9841830432415009	0.04048403390715855	± 1.0000000000000000	0.01282051282051282
	± 0.9175983965396881	0.09212150270866735	± 0.9533098466421588	0.07780168674671291
	± 0.8015780746936798	0.1388735202093891	± 0.8463475646518789	0.13498192668958189
	± 0.6423493325710297	0.1781459834384411	± 0.6861884690817557	0.18364686520355375
	± 0.4484927356243134	0.2078160511332294	± 0.4829098210913361	0.22076779356610865
	± 0.2304582893848419	0.2262831831895855	± 0.2492869301062399	0.24401579030667619
	0.0000000000000000	0.2325515532308739	0.0000000000000000	0.25193084933344673

3.7.3 評価点 ξ_i と重み w_i の値

表 3.7.3, 3.7.3 に数値積分の各評価点数における座標と重みを示す.

3.8 まとめ

本章では、本論文に後半において有限用法による音響解析の問題点の解決のための方法を述べるにあたって必要な基本的事項について述べた。まず、3次元形状内の音響解析において従来から良く用いられてきた FEM について述べ、簡単な一次元問題について例題を示した。さらに、FEM に替わる数値解法として Chebychev Collocation Method お

表 3.4 数値積分の各評価点数における座標と重み 2/2.

個数 $N + 1$	Gauss-Legendre quadrature		Gauss-Lobatto-Legendre quadrature	
	ξ_i	w_i	ξ_i	w_i
15	± 0.9879924952983856	0.03075329984002829	± 1.0000000000000000	0.00952380952380952467
	± 0.9372734129428864	0.0703660251903672	± 0.9652459265039068	0.05802989302869721727
	± 0.8482066094875336	0.1071592035701592	± 0.8850820442228142	0.10166007032583748715
	± 0.7244177162647247	0.1395706843495647	± 0.7635196899519549	0.14051169980251584923
	± 0.5709721744060516	0.1662692053106311	± 0.6062532054697992	0.17278964725359141630
	± 0.394151359796524	0.1861609978057374	± 0.4206380547136726	0.19698723596461625851
	± 0.2011940777301788	0.1984314866808033	± 0.2153539553637942	0.21197358592682083445
	0.0000000000000000	0.2025782419255613	0.0000000000000000	0.21704811634881565618
17	± 0.9905754625797272	0.02414833534383802	± 1.0000000000000000	0.00735294117647058813
	± 0.9506755173206329	0.05545953424839233	± 0.9731321766314166	0.04492194054336524911
	± 0.8802391588687897	0.08503614489931842	± 0.9108799959155814	0.07919827050356682829
	± 0.7815140187740326	0.1118838405095187	± 0.8156962512217595	0.11059290900700624594
	± 0.6576711833477020	0.1351363609099854	± 0.6910289806276903	0.13798774620206027963
	± 0.5126905143260956	0.1540457659538994	± 0.5413853993301003	0.16039466199762664189
	± 0.3512317836284637	0.1680040994404794	± 0.3721744335654771	0.17700425351565896026
	± 0.1784841716289520	0.1765627060093447	± 0.1895119735183173	0.18721633967761935891
0.0000000000000000	0.1794464703562065	0.0000000000000000	0.19066187475346943470	
19	± 0.9924068152904510	0.01946186113420327	± 1.0000000000000000	0.00584795321637426868
	± 0.9602081477642059	0.04481423158919309	± 0.9786117662220711	0.03579336518826291280
	± 0.9031558930873871	0.06904454986563122	± 0.9289015281526225	0.06338189176406329450
	± 0.8227146565914154	0.09149002160145629	± 0.8524605777966004	0.08913175709512125011
	± 0.7209661900997162	0.1115666412710876	± 0.7514942025526288	0.11231534147642613375
	± 0.6005453169345856	0.1287539595709114	± 0.6289081372652283	0.13226728044873622969
	± 0.4645707309246063	0.1426067039395612	± 0.4882292856807080	0.14841394259597964767
	± 0.3165641129016876	0.1527660406751264	± 0.3335048478244984	0.16029092404405922978
± 0.1603586375713348	0.1589688438162011	± 0.1691860234092815	0.16755658452714278228	
0.0000000000000000	0.1610544498487837	0.0000000000000000	0.17000191928482724646	

よび Spectral Element Method について述べた。さらに、DDM について述べた。DDM では分割後の領域に重複が許されるため、メッシュ生成時の拘束条件を大幅に緩和することが見込まれる。加えて、3次元形状における数値計算のために、実座標系と正規化座標系の写像および積分の係数変換について述べた。

第4章

声道アナログモデルにおける高精度なデジタルフィルタの実現方法の提案と評価

4.1 はじめに

従来から、声道と声門下との相互結合の効果として、声門流に振動成分が現れることが指摘されている [a4]. この声門流に重畳する振動成分における聴覚上での有意性については Båvegård らの報告がある [a1]. Båvegård らは、重畳する振動成分の有無と合成された音声に関して、被験者は重畳する振動成分が含まれる合成音声を好む傾向があり、さらに、定常な母音を刺激として与えた場合と比較して非定常なセンテンスを刺激として与えた際に重畳する振動成分の有無による差異をより明確に知覚することを示している.

一方で、音声生成系を電気回路モデルにより解析する方法は、Fant の音響理論以来よく用いられてきた [b2]. 声道アナログ・モデルでは、声道は特性の異なる分布定数線路の縦続接続により近似でき、周波数領域において縦続行列から声道の入力インピーダンスや伝搬特性を容易に計算できる. また、回路モデルをデジタルフィルタモデルを用いて実現することにより、声門下部（気管や肺）や声門部、声道部、口唇部における相互干渉を時間領域で模擬することが出来る. 特に声門部では非線形効果が生じるため、時間領域での模擬が可能であるという特徴は非常に重要である. しかし、回路モデルにおいて特性インピーダンスや伝搬定数が特殊な周波数依存特性を持つことから、従来方法におけるデジタルフィルタモデルの実現の際には近似誤差を最小とする周波数を選択し、その周波数での振幅のみを見て定数として扱う方法が用いられている [a12, b7, b11]. したがって、声道アナログ・モデルにおいて声道内の周波数依存特性が合成波形、特に声門流へ与える影響は未だ評価されていない. しかし、反射係数の周波数依存特性において、その時間応答が収束するまで 5-7[msec] の時間がかかることから、男性のピッチ周期内 (7-8[msec]) にわたって影響を与えることが予測されている [b8]. そこで、我々は声道アナログ・モデルについてデジタルフィルタモデルを実現するための新しい近似法を提案し、提案方法

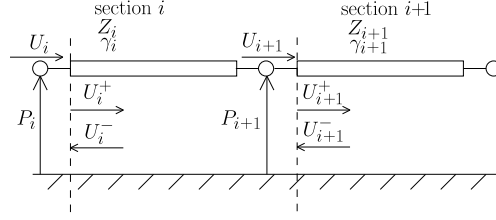


図 4.1 隣接した区間における分布定数線路.

を用いて声道内の周波数依存特性が声門流へ与える影響を明らかにする.

Wilhelms らは声道内の粘性損失の特性を近似する方法について述べている [b13]. しかし, デジタルフィルタの実現には至っておらず, 声道内損失の周波数依存特性が合成波形に与える影響を考察するには至っていない.

本章では, まず声道のデジタルフィルタモデルについて述べ, 従来の問題点について述べる. 次に, 提案方法として周波数依存特性の近似方法を述べ, 提案方法を用いて実際に音声合成し, 声門部の粒子速度波形や口唇部の粒子速度波形を示し, 従来方法での合成波形との差異を示す.

4.1.1 声道のデジタルフィルタモデル

声道モデルの縦続行列による表現

隣接した均一音響管を分布定数線路で表現した模式図を図 4.1 に示す. 第 i 区間における声門側での音圧および体積速度をそれぞれ $P_i(\omega)$, $U_i(\omega)$ とすると, 音圧と体積速度の間に次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} P_i(\omega) \\ U_i(\omega) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_i \begin{bmatrix} P_{i+1}(\omega) \\ U_{i+1}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ただし, \mathbf{F}_i は第 i 区間における縦続行列であり, 分布定数線路に成立する電信方程式を解くことで, 次式で表現できる.

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \gamma_i l}} \begin{bmatrix} 1 & Z_i \tanh \gamma_i l \\ Z_i^{-1} \tanh \gamma_i l & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$Z_i(\omega) = \sqrt{\frac{R_i(\omega) + j\omega L}{G_i(\omega) + j\omega C_i + Y_{W_i}(\omega)}} \quad (4.3)$$

$$\gamma_i(\omega) = \sqrt{(R_i(\omega) + j\omega L)(G_i(\omega) + j\omega C_i + Y_{W_i}(\omega))} \quad (4.4)$$

また, $\tanh \gamma_i l$ は, 次式のように表される.

$$\tanh \gamma_i l = \frac{e^{\gamma_i l} - e^{-\gamma_i l}}{e^{\gamma_i l} + e^{-\gamma_i l}} \quad (4.5)$$

$\gamma_i = a_i + jb_i$ は伝搬定数である. ここで, デジタル・シミュレーションのために, 無ひずみ条件を仮定したサンプリング定理を満足する T を,

$$T = 2\Delta t \quad (4.6)$$

と選ぶ。ただし、 Δt は1区間の伝搬時間である。このとき、

$$e^{\gamma_i l} = e^{a_i l} \cdot e^{j b_i l} \quad (4.7)$$

$$e^{b_i l} = e^{j \frac{\omega}{c} l} = e^{s \Delta t} = e^{\frac{sT}{2}} \quad (4.8)$$

となる。ここで、 s はラプラス変数である。さらに $z = e^{sT}$ とすると式 (4.5) は次式となる。

$$\tanh \gamma_i l = \frac{e^{a_i l} z^{\frac{1}{2}} - e^{-a_i l} z^{-\frac{1}{2}}}{e^{a_i l} z^{\frac{1}{2}} + e^{-a_i l} z^{-\frac{1}{2}}} \quad (4.9)$$

ところで、式 (4.2) 中の γ_i , Z_i は周波数の関数であり、その上 Z_i は複素数でもあるため、 F_i を z のみの関数で表現するのは困難である。そこで、これらの変数があらゆる周波数において、ある代表周波数 ω_1 における値 $a_i(\omega_1)$, $Z_i(\omega_1)$ をとるとみなしてモデル化を行う。この近似のもとで、式 (4.9) を式 (4.2) に代入することによって次式を得る。

$$\mathbf{F}_i = \frac{\alpha_i^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}}{2} \begin{bmatrix} 1 + \alpha_i z^{-1} & Z_i(1 - \alpha_i z^{-1}) \\ Z_i^{-1}(1 - \alpha_i z^{-1}) & 1 + \alpha_i z^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ウェーブマトリクスによる表現

前節での縦続行列は、声道伝達関数の導出時に使用される。それに対して、ここで述べるウェーブマトリクスはデジタルモデル実現のために必要である。

まず、第 i 区間における声門側 体積速度の、前進波成分と後進波成分をそれぞれ $U_i^+(z)$, $U_i^-(z)$ とする。第 i 区間のウェーブマトリクスを \mathbf{W}_i とすると、次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} U_i^+(z) \\ U_i^-(z) \end{bmatrix} = \mathbf{W}_i \begin{bmatrix} U_{i+1}^+(z) \\ U_{i+1}^-(z) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

また、 $P_i(z)$ および $U_i(z)$ との間には次の関係がある。

$$U_i(z) = U_i^+ - U_i^- \quad (4.12)$$

$$P_i(z) = Z_i(U_i^+ + U_i^-) \quad (4.13)$$

したがって、式 (4.10) から次式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_i^+(z) \\ U_i^-(z) \end{bmatrix} = \frac{\alpha_i^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{1 + \mu_{i+1}} \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{i+1} \\ -\mu_{i+1} \alpha_i z^{-1} & \alpha_i z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i+1}^+(z) \\ U_{i+1}^-(z) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

ただし、 μ_{i+1} は

$$\mu_{i+1} = \frac{Z_i - Z_{i+1}}{Z_i + Z_{i+1}} \quad (4.15)$$

であり、これは音響管の境界面を唇側から見た場合の体積速度反射係数となる。

以上の式をもとにして、声道1区間のデジタルフィルタモデルを構成したものを図4.2に示す。以降、このデジタルフィルタモデルをデジタルフィルタモデル C-1 と呼ぶ。

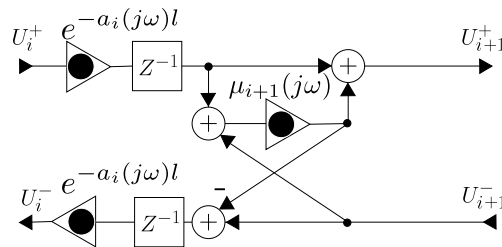


図 4.2 声道 1 区間のデジタルフィルタモデル。以降、デジタルフィルタモデル C-1 と呼ぶ。

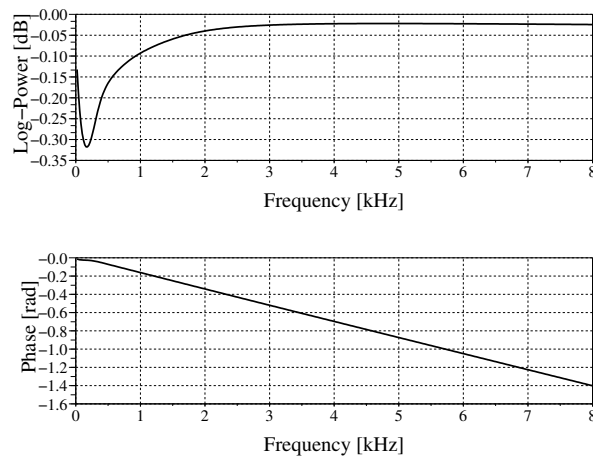


図 4.3 $e^{-\gamma}$ の周波数特性。上段：振幅特性。下段：位相特性。

4.1.2 現状のモデルにおける問題

2.3 章で述べたように、現状では γ_i , Z_i を代表周波数における値をとり、定数と見なしている。しかし、実際には γ_i , Z_i は周波数に対して依存性を持っており、これは正確なモデル化とはなっていない。特に Z の周波数依存性によって反射係数 μ が周波数依存性を持つことがわかるが、この時間応答を見ると、落ち着く時間が 5-7msec 程度になっており、現状では不十分な近似となっていることが三木により示されている [b8]。

例として、それぞれ長さが 1cm、断面積 2cm^2 の音響管と 3cm^2 の音響管を接続した際の断面積 2cm^2 側の $e^{-\gamma}$ および μ の特性を図 4.3, 図 4.4 に示す。

また、現状では声道の形状変化に伴う L , C の変化により発生する電圧源もしくは電流源が考慮されていないことを吉川らが示している [b14]。

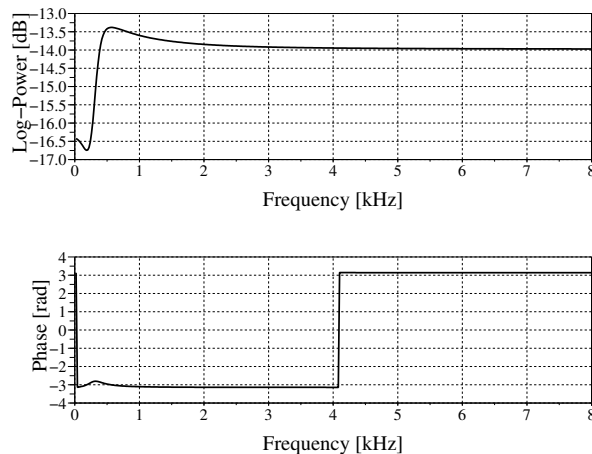


図 4.4 μ の周波数特性. 上段：振幅特性. 下段：位相特性.

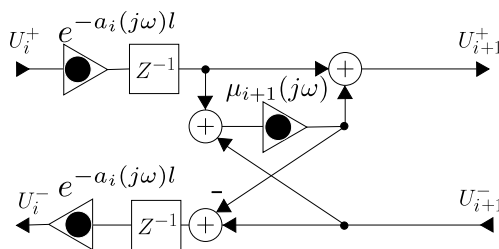


図 4.5 声道 1 区間のデジタルフィルタモデル.

4.2 声道の特性近似における提案方法

本研究で提案する声道内の特性近似の方法では、4.1.1でのデジタルフィルタモデル (図 4.5) の伝搬定数に対応する $e^{-a_i l}$ を極と零点のペアを用いて近似する。また反射係数 μ_{i+1} の特性近似においては、その特性を有理多項式を用いて近似することが難しく、511 次の FIR フィルタを用いて近似する。

4.3 より実験値に近い壁アドミタンス Y_W

神山らが実測した音圧反射係数から近似した壁インピーダンス [b5] について述べ、またそこから得られる壁アドミタンスについて述べる。

より実験値に近い壁インピーダンス $Z_m(\omega)$ は次式で近似される。

$$Z_m(\omega) = 700 + j\omega 0.5 (f < 325[\text{Hz}]) \tag{4.16}$$

$$Z_m(\omega) = 1900 + j\omega 0.5 (f \geq 325[\text{Hz}]) \tag{4.17}$$

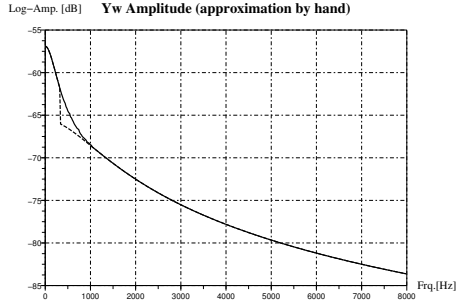


図 4.6 Y_W の振幅特性. 実線が平滑化後, 破線が平滑化前.

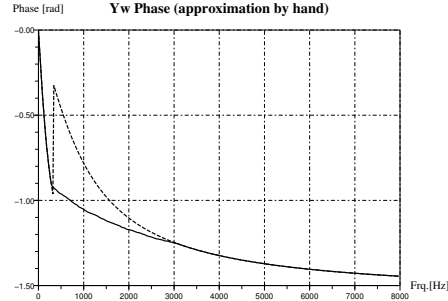


図 4.7 Y_W の位相特性. 実線が平滑化後, 破線が平滑化前.

ここから, 壁アドミタンス $Y_W(\omega)$ は,

$$Y_W(\omega) = \frac{S}{Z_m} \tag{4.18}$$

で表される. ここで, S は周長である.

式 (4.18) は不連続点を持っており, 特に位相に関してはその差が大きい. そこで, 本研究ではその不連続点を滑らかに接続した壁アドミタンスを用いる. 平滑化後と平滑化前の Y_W の振幅特性と位相特性をそれぞれ図 4.6, 図 4.7 に示す.

4.4 対数領域での最急降下法

ここでは対数領域での最急降下法について述べる. 通常的最急降下法に用いられる誤差関数を用いて近似した場合, 振幅の大きい周波数帯は近似精度が良い一方で振幅が小さい周波数帯では近似精度が低いことが知られている [e6]. この問題を解決するため, 誤差関数に対数を導入する手法が Sidman らにより提案されている [e6].

まず, 通常的最急降下法について述べる. ここで述べる理論や式は文献 [e5] を引用・参照している.

直感的に理解しやすくするため, いま探索対象の関数は 2 変数 x_1, x_2 の関数 $y = f(x_1, x_2)$ であるとし, 同じ高さの線を点をつないだ等高線によって例えば図 4.8 に示すように探索対象の関数を表すものとする. 最初の探索点が同図中の点 P_0 にあるとすると, 求めるべき関数の最小値を与える点は, 同図中の点 P_p である.

最急降下法では, 各探索点において, その点での勾配が最小になる方向に所定の距離だけ進んだ点を次の探索点に設定する. この処理を各探索点において行うことで, 図 4.8 中の矢印にあるような探索が順次行われ, 最終的に最小点である P_p に到達する. ただし 1 回の探索の移動量を固定の大きな値にしたとき, 関数が最小値をとる付近で振動が生じて探索が進まなくなる場合がある. これを避けるために 1 回の移動量を小さな値にすると, 最小値付近では良好な探索が行われるようになるが, 最小値からはなれた場所での探索回

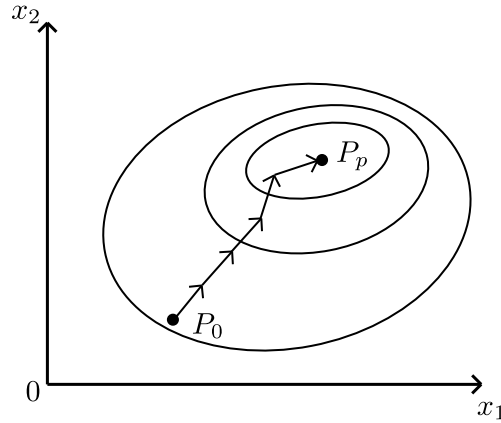


図 4.8 最急降下法における探索.

数が増えるため、収束するまでに長い処理時間を要するようになる。このため、最急降下法では一般に移動量を探索点における勾配の値に比例させる方法がとられている。すなわち、 n 個の変数 x_1, x_2, \dots, x_n の関数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{4.19}$$

を探索対象とするとき、 i 番目の探索点 $P_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$ の次の探索点 $P_{i+1}(x_{1(i+1)}, x_{2(i+1)}, \dots, x_{n(i+1)})$ の $j(1 \leq j \leq n)$ 番目の成分を、

$$x_{j(i+1)} = x_{ji} - K \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{4.20}$$

とする。ここで、 K は定数。これにより、勾配が急な部分では1回の移動量が大きくなるため高速な探索が行われ、勾配が緩やかな最小値付近では移動量が小さくなり精密な探索が行われる。

4.4.1 再急降下法による近似例

近似問題において、最小するべき関数は誤差関数である。ここでは単純な近似例として、近似目標を $M(x)$ 、近似関数を $H(x, \mathbf{P}) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x^1 + a_4$ としたときの例を述べる。ここで、 \mathbf{P} は係数ベクトル $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ であり、 $x \in \mathbb{R}$ である。

ここで、誤差関数 $J(\mathbf{P})$ を最も単純な

$$J(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{nd} \{H(x_i, \mathbf{P}) - M(x_i)\}^2 \tag{4.21}$$

とすると、誤差関数の係数 a_j に関する傾斜 $\frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial a_j}$ は

$$\frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{nd} 2 \{H(x_i, \mathbf{P}) - M(x_i)\} \cdot \frac{\partial H(x_i, \mathbf{P})}{\partial a_j} \tag{4.22}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{nd} \{H(x_i, \mathbf{P}) - M(x_i)\} \cdot x_i^{4-j} \quad (4.23)$$

である。

したがって、ある時点 n における係数 $a_j(n)$ の次の時点 $n+1$ の係数 $a_j(n+1)$ は以下の式から求められる。

$$a_j(n+1) = a_j(n) - 2K \sum_{i=1}^{nd} \{H(x_i, \mathbf{P}) - M(x_i)\} \cdot x_i^{4-j} \quad (4.24)$$

次に、誤差関数に対数を導入する。まず、近似先の周波数特性を $M(s)$ とすると、最小にするべき誤差関数 $J(\mathbf{P})$ は、

$$J(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{nd} [H(j\omega_i, \mathbf{P}) - M(j\omega_i)]^2 \quad (4.25)$$

と表すことができる。ここで、 \mathbf{P} は係数ベクトルである。ここでは例として後に述べる係数ベクトル $\mathbf{P} = [w_1, w_2, w_3, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}]$ を用いる。

また、勾配 $\nabla J(\mathbf{P})$ は

$$\nabla J(\mathbf{P}) = \left[\frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial w_1}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial w_2}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial w_3}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{21}}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial J(\mathbf{P})}{\partial \sigma_{23}} \right] \quad (4.26)$$

と定義される。

勾配 $\nabla J(\mathbf{P})$ について、複素数 E の絶対値の二乗の導関数は、

$$(|E|^2)' = (E\bar{E})' = E\bar{E}' + E'\bar{E} = 2\text{Re} [E\bar{E}'] \quad (4.27)$$

で与えられる [e6]。なお、 \bar{E} は E の複素共役である。

式 (4.27) より、勾配 $\nabla J(\mathbf{P})$ は以下のように表される。

$$\nabla J(\mathbf{P}) = 2\text{Re} \sum_{i=1}^{nd} [H(j\omega_i, \mathbf{P}) - M(j\omega_i)] \overline{\nabla H(j\omega_i, \mathbf{P})} \quad (4.28)$$

次に、誤差関数 $J(\mathbf{P})$ に対数を導入すると、

$$J(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{nd} |\log [H(j\omega_i, \mathbf{P})] - \log [M(j\omega_i)]|^2 \quad (4.29)$$

となり、式 (4.29) から勾配 $\nabla J(\mathbf{P})$ は次式で表される。

$$\nabla J(\mathbf{P}) = 2\text{Re} \sum_{i=1}^{nd} [\log [H(j\omega_i, \mathbf{P})] - \log [M(j\omega_i)]] \cdot \overline{\nabla \log [H(j\omega_i, \mathbf{P})]} \quad (4.30)$$

したがって、振幅のみをみた誤差関数は以下ようになる。

$$J(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{nd} |\log |H(j\omega_i, \mathbf{P})| - \log |M(j\omega_i)||^2 \quad (4.31)$$

$$\nabla J(\mathbf{P}) = 2 \sum_{i=1}^{nd} [\log |H(j\omega_i, \mathbf{P})| - \log |M(j\omega_i)|] \cdot \nabla \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})| \quad (4.32)$$

ここで、

$$\nabla \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})| = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial w_1}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial w_2}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial w_3}, \\ \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{13}}, \\ \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{21}}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial \log |H(j\omega_i, \mathbf{P})|}{\partial \sigma_{23}} \end{array} \right] \quad (4.33)$$

である。

4.5 $e^{-a_i l}$ の特性近似の方法

4.5.1 $e^{-a_i l}$ の特性近似に用いる近似モデル

ここでは本研究で用いた近似モデルについて述べる。

図 4.3 に示すように、 $e^{-a_i l}$ の周波数特性は非常に狭い帯域の中で振幅が小さく変化している。そのため、極や零点が単独で存在している場合にはこの特性を近似するのは難しい。例として、零点の虚部を $f_0 = 1$ [kHz] に保ち、実部を動かしたとき、つまり次式において σ を変化させた場合の振幅特性を図 4.9 に示す。

$$H(s) = \frac{1}{(s/\alpha - 1)(s/\bar{\alpha} - 1)} \quad (4.34)$$

$$\alpha = \sigma + j\omega \quad (4.35)$$

$$\omega = 2\pi f_0 \quad (4.36)$$

また、 $\bar{\alpha}$ は α の複素共役である。

そこで、ある 1 対の極と零点の共振周波数が等しいモデルを考える。このようなモデルでは極と零点が互いに打ち消し合うことから帯域幅が狭く、かつ振幅の山（谷）の大きさが小さい特性を近似できる。

極と零点の対を 1 対だけ持つモデルの伝達関数 $H_{s_1}(s)$ を次に示す。

$$H_{s_1}(s) = \frac{(s/\alpha_{11} + 1)(s/\bar{\alpha}_{11} + 1)}{(s/\alpha_{21} + 1)(s/\bar{\alpha}_{21} + 1)} \quad (4.37)$$

$$\alpha_{mn} = \sigma_{mn} + j\omega_n \quad (4.38)$$

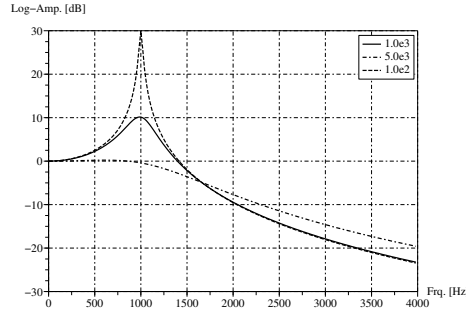


図 4.9 σ の変化に対する振幅特性の変化.

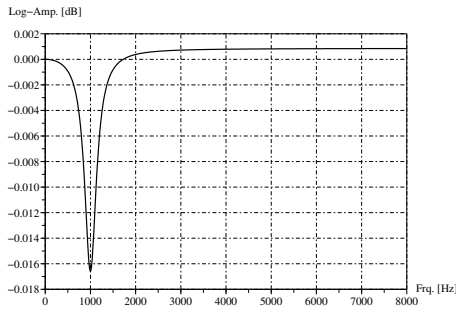


図 4.10 1組の極と零点の対の振幅特性.

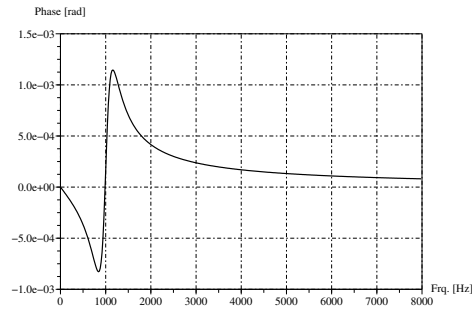


図 4.11 1組の極と零点の対の位相特性.

例として $\sigma_{11} = 1.0 \times 10^3 - 1$, $\sigma_{21} = 1.0 \times 10^3 + 1$, $\omega_1 = 2\pi \cdot 1000$ としたとき、このモデルの周波数特性を図 4.10, 図 4.11 に示す.

極と零点の対が 1 対では伝搬定数の周波数特性を近似することはできない. そこで極と零点の対が 3 対あるモデルを考え、それぞれの対の帯域幅を調整することで近似を可能とする. 3 対の極と零点の対を持つモデルの伝達関数 $H_{s3}(s)$ は次式で表される.

$$H_{s3}(s) = \prod_{n=1}^3 \frac{(s/\alpha_{1n} + 1)(s/\overline{\alpha}_{1n} + 1)}{(s/\alpha_{2n} + 1)(s/\overline{\alpha}_{2n} + 1)} \quad (4.39)$$

$$\alpha_{mn} = \sigma_{mn} + j\omega_n \quad (4.40)$$

例として $\sigma_{11} = 1.0 \times 10^3 - 1$, $\sigma_{21} = 1.0 \times 10^3 + 1$, $\sigma_{12} = 1.0 \times 10^4 - 1$, $\sigma_{22} = 1.0 \times 10^4 + 1$, $\sigma_{13} = 1.0 \times 10^4 - 1$, $\sigma_{23} = 1.0 \times 10^4 + 1$, $\omega_1 = 2\pi \cdot 1.0 \times 10^{-10}$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 500$, $\omega_3 = 2\pi \cdot 1000$ としたとき、式 (4.39) の周波数特性を図 4.12, 図 4.13 に示す.

本研究では、近似目標の周波数特性について周波数が 0[Hz] の時の振幅を *Gain* として、*Gain* ですべての周波数特性を正規化してから式 (4.39) を近似モデルとして近似計算を行う. こうすることで、*Gain* を近似パラメータに含めずに近似計算を行えるので収束が良い. そして、全体の利得を表す *Gain* を乗算した式 (4.41) を用いて、正規化する前の

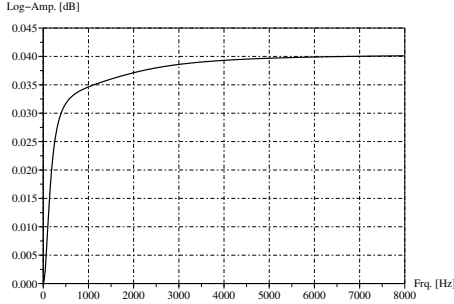


図 4.12 3組の極と零点の対の振幅特性.

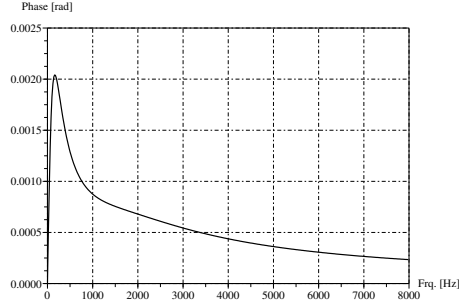


図 4.13 3組の極と零点の対の位相特性.

近似目標の伝達関数を表す.

$$H_s(s) = Gain \prod_{n=1}^3 \frac{(s/\alpha_{1n} + 1)(s/\overline{\alpha_{1n}} + 1)}{(s/\alpha_{2n} + 1)(s/\overline{\alpha_{2n}} + 1)} \quad (4.41)$$

$$\alpha_{mn} = \sigma_{mn} + j\omega_n \quad (4.42)$$

4.5.2 $e^{-a_{il}}$ の近似アルゴリズム

$e^{-a_{il}}$ の近似については3組の極と零点の対を持つモデルを用いた.

$$\begin{aligned} e^{-a(j\omega)l} &\approx H_{pc}(s, \mathbf{P}) \\ &= G \frac{s/\sigma_{11} + 1}{s/\sigma_{21} + 1} \cdot \prod_{k=2}^3 \frac{(s/\alpha_{1k} + 1)(s/\overline{\alpha_{1k}} + 1)}{(s/\alpha_{2k} + 1)(s/\overline{\alpha_{2k}} + 1)} \quad (4.43) \\ \alpha_{mk} &= \sigma_{mk} + j\omega_k \end{aligned}$$

係数の初期値については, $\sigma_{11} = 80$, $\sigma_{21} = 80$, $\sigma_{13} = 8.0 \times 10^3$, $\sigma_{23} = 8.0 \times 10^3$ に固定し, ω_1 は振幅の谷の中心周波数に設定し, $\omega_3 = 3\omega_2$ とした. また, σ_{12} と σ_{22} は範囲 $[2.5 \times 10^3, 2.9 \times 10^3]$ を40分割して, すべての初期値から近似計算を行い, 近似計算後に最も誤差の小さい係数を選択して用いる.

近似計算のアルゴリズムを表4.1に示す. ここでは簡単のため逐次処理として示すが, 実際のプログラムではStep 4からStep 13は m に対して独立に計算可能であるから, 並列に処理している.

表 4.1 近似計算のアルゴリズム 1/2.

Step	処理
1	<p>近似目標の周波数特性 $M(j\omega_i)$ を計算する.</p> <p>ここでの計算式は $M(j\omega_i) = \frac{e^{\gamma_{lossy}t}}{e^{\gamma_{lossless}t}}$</p> $\gamma_{lossy} = \sqrt{(R(\omega) + j\omega L)(G(\omega) + j\omega C + Y_w(\omega))}$ $\gamma_{lossless} = \sqrt{-\omega^2 LC}$
2	<p>J_{tmp} 近似誤差を一時的に格納する変数.</p> <p>初期値は十分に大きくしておく.</p>
3	<p>$m = 0$ 極と零点のバンド幅の初期値を変化させる変数.</p> <p>m は 0 ~ 40 まで変化させる.</p>
4	<p>初期値として係数ベクトル \mathbf{P} を設定する.</p> $\sigma_{11} = 80, \sigma_{21} = 80$ $\sigma_{13} = 3.0 \times 80^3, \sigma_{23} = 8.0 \times 10^3$ $\sigma_{21} = 2.5 \times 10^3 + m \times 10^2, \sigma_{22} = 2.5 \times 10^3 + m \times 10^2$ <p>ω_2 は $M(j\omega)$ が最小値をとる ω</p> <p>$\omega_3 = 3\omega_2$ に設定.</p>
5	<p>近似目標の周波数特性 $M(j\omega_i)$ の周波数が 0 の時の振幅を $Gain$ として全周波数特性を正規化する.</p>
6	<p>式 (4.39) を用いて現在の係数ベクトル \mathbf{P} について,</p> <p>すべての i に対して $H(j\omega_i, \mathbf{P})$ を計算する.</p>
7	<p>$error_i = \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) - \log M(j\omega_i)$ を</p> <p>すべての i に対して計算する.</p> <p>式 (4.31) 参照.</p>
8	<p>現在の誤差 $J(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{nd} error_i^2$ を計算する.</p> <p>式 (4.31) 参照.</p>
9	<p>反復回数が最大反復回数より大きければ Step 14 へ.</p>

表 4.2 近似計算のアルゴリズム 2/2.

10	差分近似を用いて $\nabla \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) =$ $\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial w_1} = 0.0, \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial w_2}, \\ \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{21}}, \\ \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{22}}, \\ \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) }{\partial \sigma_{23}} \end{array} \right] \text{を計算する.}$
11	$\nabla J(\mathbf{P}) = 2 \sum_{i=1}^{nd} error_i \cdot \nabla \log H(j\omega_i, \mathbf{P}) $ を計算する. 式 (4.32) 参照.
12	$\mathbf{P} = \mathbf{P} - K \cdot \nabla J(\mathbf{P})$ を計算する. 式 (4.20) 参照. 本研究では $K = 1.0 \times 10^3$ とした.
13	Step 5 へ
14	$J(\mathbf{P}) < J_{tmp}$ ならば, $J_{tmp} = J(\mathbf{P}), P_{tmp} = \mathbf{P}$
15	$m < 41$ ならば, $m = m + 1$, Step 2 へ $m \geq 41$ ならば, P_{tmp} を近似結果として近似アルゴリズムを終了する.

4.5.3 $e^{-a_i l}$ の近似結果

最も近似誤差が大きかった、つぶれ指標 $Sr = 0.1$ 、声道断面積 $A = 0.5[\text{cm}^2]$ における近似結果を図 4.14 に、最も近似誤差が小さかった、つぶれ指標 $Sr = 1.0$ 、声道断面積 $A = 15.0[\text{cm}^2]$ における近似結果を図 4.15 示す。

声道一区間の長さを $0.2[\text{cm}]$ に固定し、各断面積 A とつぶれ度 Sr の組において近似を行った結果、近似パラメータ $\{G, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \omega_2, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \omega_3, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ が、曲面として分布した。例として、図 4.16 に各断面積 A とつぶれ度 Sr におけるパラメータ σ_{11} を示す。声道一区間の長さが一定であれば、この曲面を近似する関数をあらかじめ求めることにより、形状が変化した際にも係数を高速に得られる。また、近似の傾向として、図 4.17 に示すように断面積 A が小さく、また、つぶれ度 Sr が小さいほど二乗誤差が増加する傾向がみられる。図 4.14, 4.15 にそれぞれ二乗誤差が最も大きい時と最も小さいときの近似結果を示す。

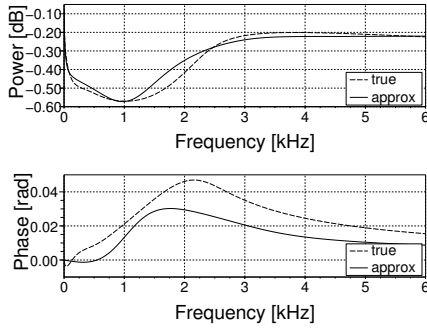


図 4.14 最も近似誤差が大きかった伝搬定数の近似結果. つぶれ指標 $Sr = 0.1$, 声道断面積 $A = 0.5[\text{cm}^2]$.

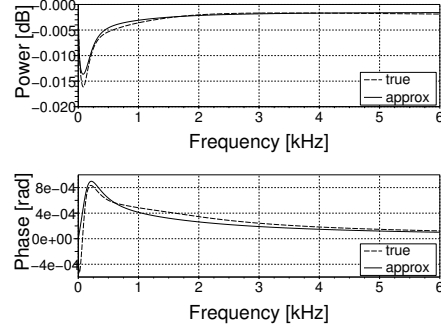


図 4.15 最も近似誤差が小さかった伝搬定数の近似結果. つぶれ指標 $Sr = 1.0$, 声道断面積 $A = 14.9[\text{cm}^2]$.

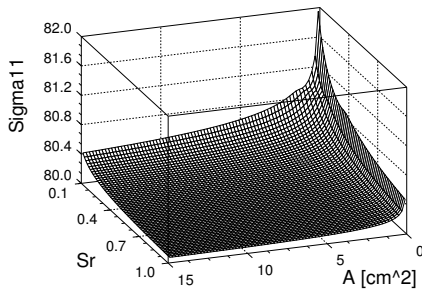


図 4.16 係数 σ_{11} の近似結果 (断面積 A とつぶれ度 Sr の関数実現).

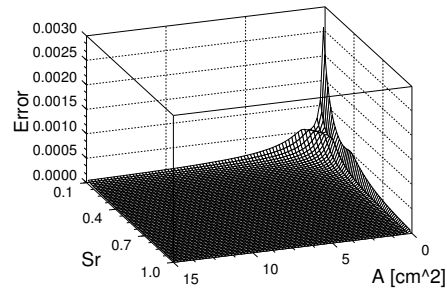


図 4.17 伝搬特性の近似誤差.

4.5.4 $e^{-a_i l}$ のデジタルフィルタの実現

s の有理多項式をデジタルフィルタへ変換する際に、デルタ変換を用いれば、係数感度を下げることができ、係数の変化に対し、フィルタの安定性が期待される [e1]. そこで、デルタ変換後の伝達関数を求める.

デルタ変換後の伝達関数は

$$H_{pc}(\gamma, \mathbf{P}) = G \cdot g_1 \left\{ 1 + \frac{a_{21}}{\gamma - b_{21}} \right\} \cdot \prod_{k=2}^3 g_k \frac{\gamma^2 + a_{1k}\gamma + a_{2k}}{\gamma^2 - b_{1k}\gamma - b_{2k}} \quad (4.44)$$

と表される. 係数 g_1, a_{21}, b_{21} はそれぞれ

$$g_1 = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} \quad (4.45)$$

$$a_{21} = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{21})(1 - e^{-\sigma_{21}T_s})}{\sigma_{21}T_s} \quad (4.46)$$

$$b_{21} = \frac{e^{-\sigma_{21}T_s} - 1}{T_s} \quad (4.47)$$

で与えられる。また、 $k = 2, 3$ のとき、係数 $a_{1k}, a_{2k}, b_{1k}, b_{2k}, g_k$ は

$$g_k = \frac{\sigma_{2k}^2 + \omega_k^2}{\sigma_{1k}^2 + \omega_k^2} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} a_{1k} = & 2(\sigma_{1k} - \sigma_{2k})e^{-\sigma_{2k}T_s} \left(\frac{\sin \omega_k T_s}{\omega_k T_s} \right) \\ & + \frac{\sigma_{1k}^2 - \sigma_{2k}^2}{\omega_k(\sigma_{2k}^2 + \omega_k^2)} \left\{ \frac{-\sigma_{2k}e^{-\sigma_{2k}T_s} \sin \omega_k T_s}{T_s} \right. \\ & \left. + \frac{\omega_k(1 - e^{-\sigma_{2k}T_s} \cos \omega_k T_s)}{T_s} \right\} \\ & + \frac{2 - 2e^{-\sigma_{2k}T_s} \cos \omega_k T_s}{T_s} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$a_{2k} = \left(1 + \frac{\sigma_{1k}^2 - \sigma_{2k}^2}{\sigma_{2k}^2 + \omega_k^2} \right) \left\{ \frac{e^{-2\sigma_{2k}T_s}}{T_s^2} + 1 - 2e^{-\sigma_{2k}T_s} \cos \omega_k T_s \right\} \quad (4.50)$$

$$b_{1k} = \frac{2e^{-\sigma_{2k}T_s} \cos \omega_k T_s - 2}{T_s} \quad (4.51)$$

$$b_{2k} = \frac{2e^{-\sigma_{2k}T_s} \cos \omega_k T_s - e^{-2\sigma_{2k}T_s} - 1}{T_s^2} \quad (4.52)$$

によって与えられる。ここで、 T_s はサンプリング周期 [sec] である。

さらに、式 (4.44) へ $\gamma = \frac{z-1}{T_s}$ を代入し、デジタルフィルタの伝達関数を得る。

4.6 μ_{i+1} の特性近似の方法

μ_{i+1} の近似については、係数を決定するパラメータが声帯側の断面積 A_1 、つぶれ指標 Sr_1 、口唇側の断面積 A_2 、つぶれ指標 Sr_2 と多いため、近似後の係数をパラメトリックに求めることが難しい。また、パラメータの値の組み合わせにより μ_{i+1} の周波数特性の特徴が大きく異なるため、有理多項式を用いてその周波数特性を近似することができなかった。

そのため、安易な方法ではあるが逆高速フーリエ変換を用いて周波数特性から直接インパルス応答を求め、それに窓を掛けたものを FIR フィルタの係数として用いることで近似した。

$$\mu_{i+1} \approx \sum_{i=0}^p c_i z^{-i}, p = 511 \quad (4.53)$$

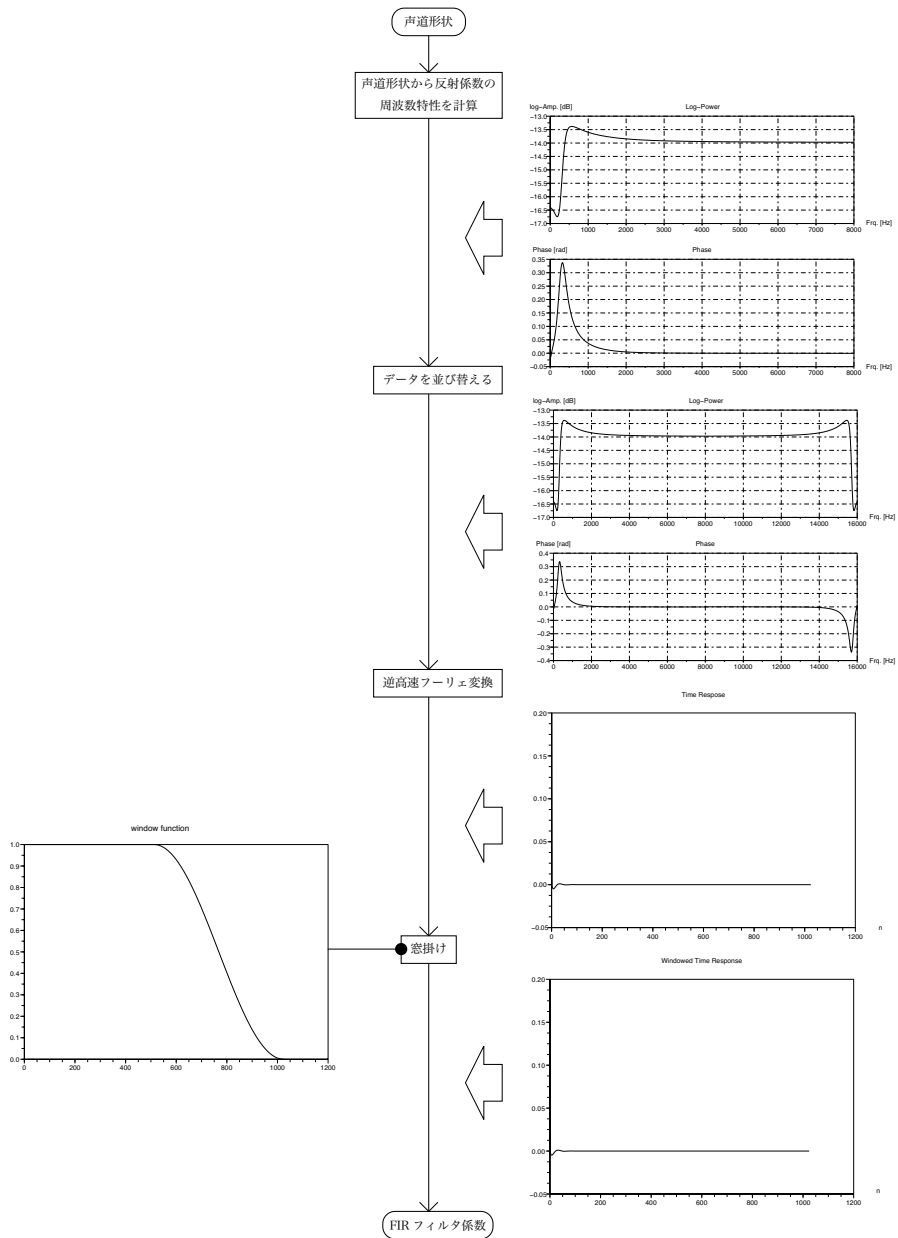


図 4.18 FIR フィルタの係数の生成フロー。

図 4.18 に FIR フィルタの係数 c_i の生成フローを示す (図では 1023 次の係数を計算しているが、実験を行った結果、511 次で十分な近似を得られた)。

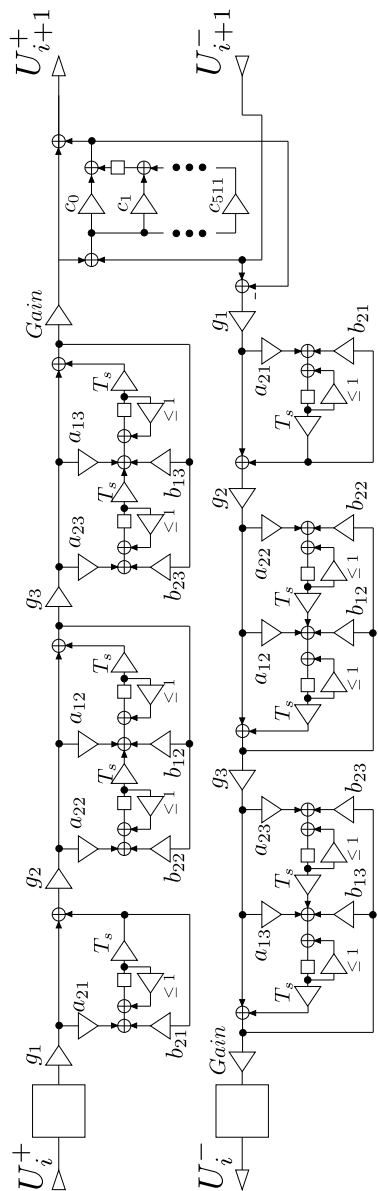


図 4.19 最終的に提案する声道一区間のデジタルフィルタモデル.

4.7 声道一区間のデジタルフィルタモデルの構成

提案する声道一区間のデジタルフィルタモデルの構成は伝搬定数が ARMA フィルタ (次数 分子 5 次:分母 5 次), 反射係数が FIR フィルタ (次数 511 次) で構成される. ブロック図を図 4.19 に示す.

4.7.1 近似精度の検証

この章では我々のデジタルフィルタモデルの近似精度を駆動点インピーダンスと伝達関数の周波数特性の観点から評価する。

以下の議論では我々のモデルの近似精度を評価するために、声道の伝達関数 $H(j\omega)$ と駆動点インピーダンス $Z_v(j\omega)$ の真値は回路モデルの縦続行列を用いて計算される。一方で、我々のモデルにおける伝達関数 $\hat{H}(j\omega)$ と駆動点インピーダンス $\hat{Z}_v(j\omega)$ において、その縦続行列は近似した反射係数と伝搬定数から計算される。さらに、口唇部における放射インピーダンスは無窮バツフルの近似モデル $Z_L(s)$ を用いた [a12]。 $Z_L(s)$ は次式で与えられる。

$$Z_L(s) = (\rho c / (\pi a^2)) (s L_r R_r / (R_r + s L_r)) \quad (4.54)$$

$$R_r = 128 / (9\pi^2) \quad (4.55)$$

$$L_r = 8a / (3\pi c) \quad (4.56)$$

ここで、 a は開口部の半径である。また、口唇部におけるデジタルフィルタモデル $\hat{\mu}_L(z)$ はデルタ変換を用いて実現される。口唇部における反射係数 $\mu_L(s)$ は

$$\mu_L(s) = \frac{Z_N(s) - Z_L(s)}{Z_N(s) + Z_L(s)} \quad (4.57)$$

で与えられる。ここで、 $Z_N(s)$ は口唇部に一番近い声道の区間の特性インピーダンスである。簡単のために、この区間は損失なしとした。そのため $Z_N(s)$ は周波数特性を持たず定数として扱うことができる。つまり、 $Z_N(s) = \rho c / (\pi a^2)$ である。この場合反射係数 $\mu_L(s)$ は

$$\mu_L(s) = g_L \frac{s + \sigma_{1L}}{s + \sigma_{2L}} \quad (4.58)$$

として与えられる。ここで、係数 g_L , σ_{1L} および σ_{2L} は次式で与えられる。

$$g_L = (1 - R_r) / (1 + R_r) \quad (4.59)$$

$$\sigma_{1L} = R_r / ((1 - R_r) L_r) \quad (4.60)$$

$$\sigma_{2L} = R_r / ((1 + R_r) L_r) \quad (4.61)$$

次に、デルタ変換後の反射係数 $\mu_L(\gamma)$ は

$$\mu_L(\gamma) = g_L \left\{ 1 + \frac{a_L}{\gamma - b_L} \right\} \quad (4.62)$$

となる。ここで、係数 a_L , b_L はそれぞれ

$$a_L = \frac{(\sigma_{1L} - \sigma_{2L})(1 - e^{-\sigma_{2L} T_s})}{\sigma_{2L} T_s} \quad (4.63)$$

$$b_L = \frac{e^{-\sigma_{2L} T_s} - 1}{T_s} \quad (4.64)$$

で与えられる.

さらに, z 領域における反射係数 $\hat{\mu}_L(z)$ は $\gamma = (z-1)/T_s$ を式 (4.62) へ代入することで得られる.

以下では $\hat{H}(j\omega)$ と $\hat{Z}_v(j\omega)$ の近似精度の評価を示す.

体積速度伝達特性の近似精度

我々の提案方法をデジタルフィルタモデルの近似の用いた場合, 我々の近似は 0–6 kHz において真値に対し非常によい一致を見せた. 2–6 kHz においては近似誤差がほぼ 0 であり, 0–2 kHz において微少な誤差が生じたため, 0–2 kHz における体積速度伝達関数の周波数特性を図 4.20 に示す. 図 4.20 に示したように, 日本語男性母音 /u/, /i/, /a/ において, 従来のデジタルフィルタモデル [b7] と比較して, 第 1, 第 2 フォルマント周辺における近似精度の向上がみられる.

従来のデジタルフィルタモデルにおいて, 低周波領域で大きな近似誤差がみられる. これは反射係数と伝搬定数に対して周波数依存特性が特に低い周波数で大きく現れ, その一方で, 高周波領域における周波数依存特性はほぼ一定で定数として扱うことができることによる.

声門における駆動点インピーダンスの近似精度

回路モデルの近似において, 駆動点インピーダンスの近似を高精度に行うことは重要であるため, ここでは我々のデジタルフィルタモデルの駆動点インピーダンスの近似精度を評価する.

駆動点インピーダンス $Z_v(j\omega)$ は縦続行列の $ABCD$ パラメータを用いて以下のように計算される.

$$Z_v(j\omega) = \frac{A(j\omega)Z_L(j\omega) + B(j\omega)}{C(j\omega)Z_L(j\omega) + D(j\omega)}. \quad (4.65)$$

体積速度伝達関数の近似結果と同様に, 駆動点インピーダンスの近似においても我々の近似法は 0–6 kHz において真値に対し, 非常によい一致が得られる. ここでは, 日本語男性母音 /u/, /i/, /a/ について, 図 4.21 に 0–6 kHz における駆動点インピーダンスを示す. 図 4.21 において, 最も低い周波数の共振点において近似精度の向上が顕著にみられる. 本研究における数値実験においては, この共振点付近の帯域にはピッチ周波数が含まれてはいないものの, two-mass model の非線形効果により生じるピッチ周波数の高調波成分を含む. したがって, この高調波成分および駆動点インピーダンス, 時変の声門インピーダンス間の相互作用が予想される.

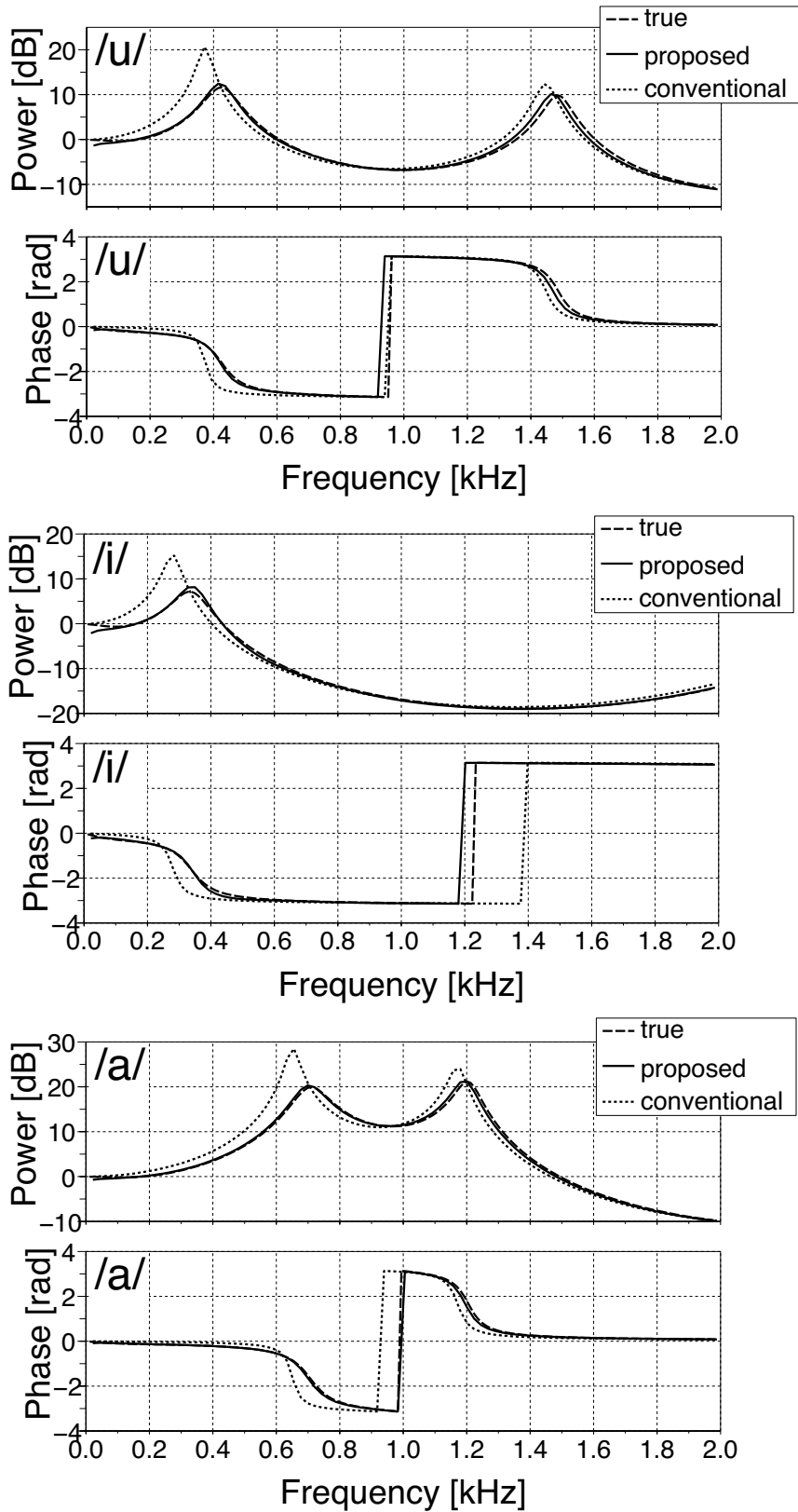


図 4.20 日本語男性母音/u/, /i/, /a/に対する体積速度伝達関数.

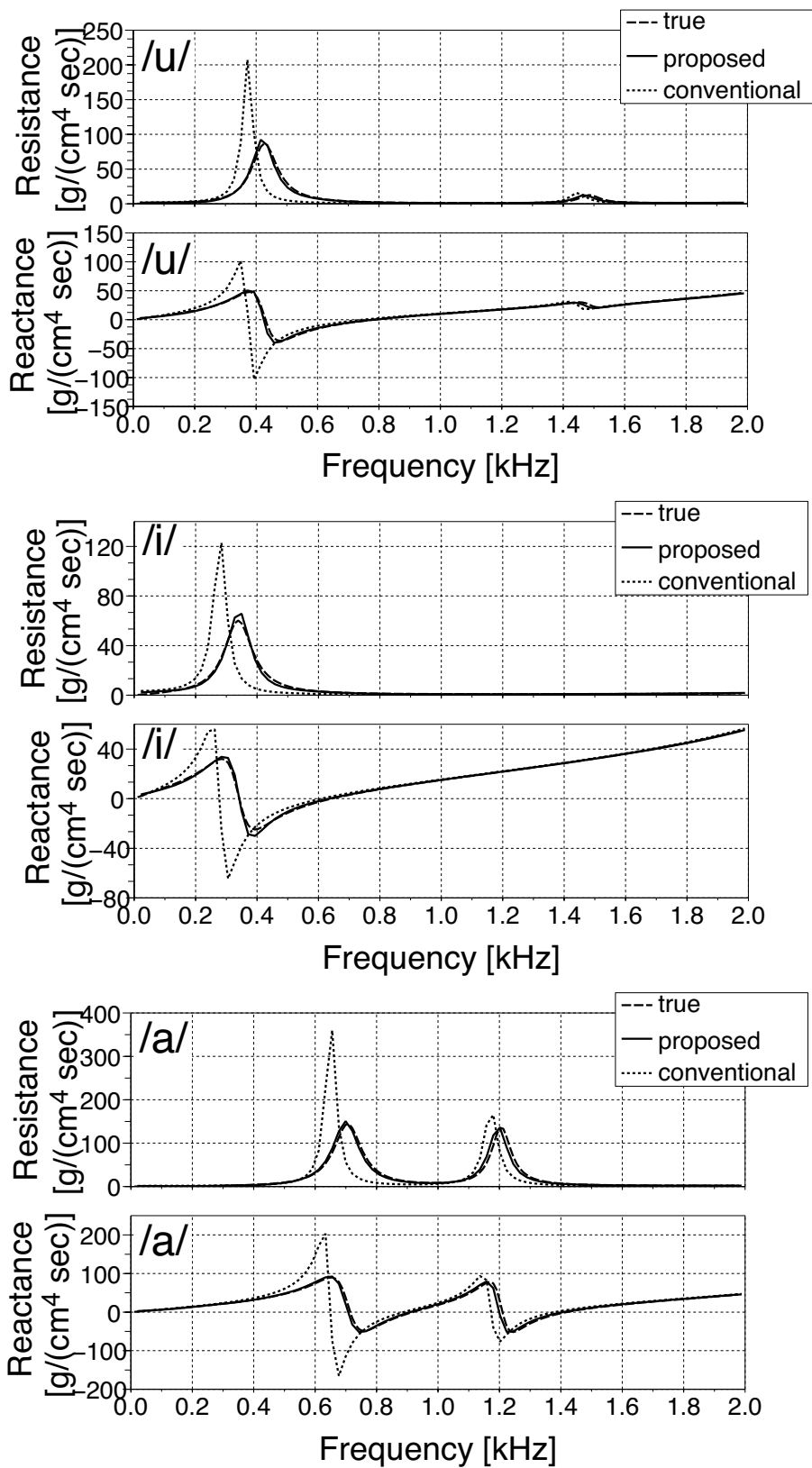


図 4.21 日本語男性母音/u/, /i/, /a/に対する駆動点インピーダンス。

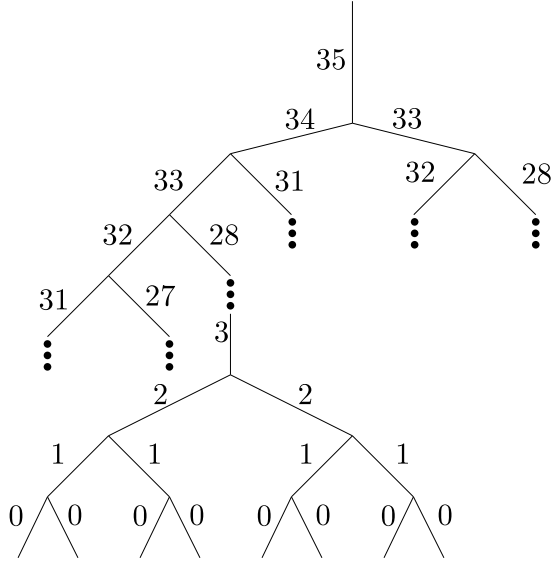


図 4.22 声門下の Branching network model.

4.8 声門下のデジタルフィルタモデルの実現方法

ここでは我々が用いる声門下モデルについて述べる.

文献 [a5] に従い, ここでは声門下の回路モデルとして分布定数線路モデルを採用する. 回路モデルは図 2.5 に示したものと構造は同じであるが, 各素子のパラメータは次式で与えられる.

$$L = \rho/A \tag{4.66}$$

$$C = A/(\rho c^2) \tag{4.67}$$

$$R(\omega) = (S/A^2)\sqrt{(\omega\rho\mu)/2} \tag{4.68}$$

$$G(\omega) = (0.4S/(\rho c^2))\sqrt{(\omega\lambda)/(2c_p\rho)} \tag{4.69}$$

$$Y_w(\omega) = R_w(\omega) + j(\omega I_w - 1/(\omega C_w)) \tag{4.70}$$

Fredberg と Hoenig の Branching network model とその終端モデルをそれぞれ図 4.22, 4.23 に示す. Fredberg と Hoenig の Branching network model には分岐が対象なモデルと非対称なモデルがあるが, 本研究では非対称なモデルを用いた. 肺胞による終端のインピーダンスは

$$Z_0 = R_T + j(\omega I_T - (\omega C_T)^{-1}) + R_W + j(\omega I_W - (\omega C_W)^{-1}). \tag{4.71}$$

で与えられ, それぞれの物理パラメータは表 4.3 で与えられる. 図 4.24 に示したように,

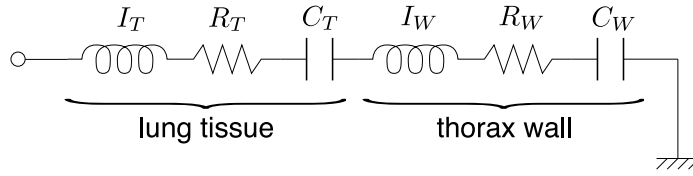


図 4.23 肺の終端における回路モデル.

表 4.3 肺の終端における各パラメータ.

Lung tissue	Thorax wall	Unit
$R_T = 0.5 \times 0.98\epsilon$	$R_W = 1.0 \times 0.98\epsilon$	$\text{g}/(\text{cm}^4 \text{ sec})$
$I_T = 0.005 \times 0.98\epsilon$	$I_W = 0.005 \times 0.98\epsilon$	g/cm^4
$C_T = 0.1/(0.98\epsilon)$	$C_W = 0.2/(0.98\epsilon)$	$\text{cm}^4 \text{ sec}^2/\text{g}$

$\epsilon = 1.0$

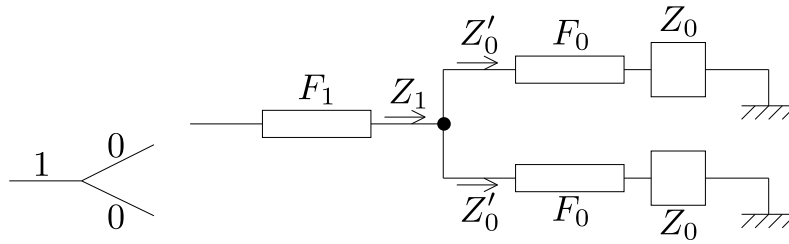


図 4.24 肺の回路終端.

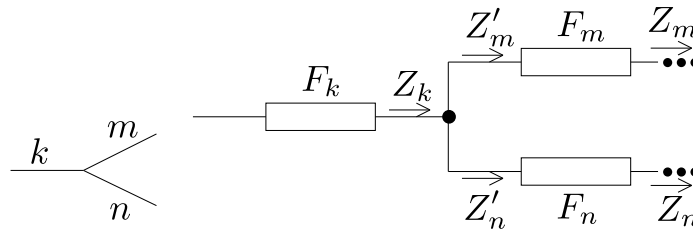


図 4.25 階層 \$k\$ における分岐モデル.

終端に接続された階層のインピーダンス Z_1 は以下のように表される.

$$Z_1 = \frac{Z'_0}{2}, \text{ where } Z'_0 = \frac{A_0 Z_0 + B_0}{C_0 Z_0 + D_0} \quad (4.72)$$

ここで, A_0, \dots, D_0 は縦続行列から計算される. さらに, 図 4.25 に示したような分岐の場合では, 入力インピーダンス Z_k は以下のように表される.

$$Z_k = \frac{Z'_m Z'_n}{Z'_m + Z'_n}, \quad (4.73)$$

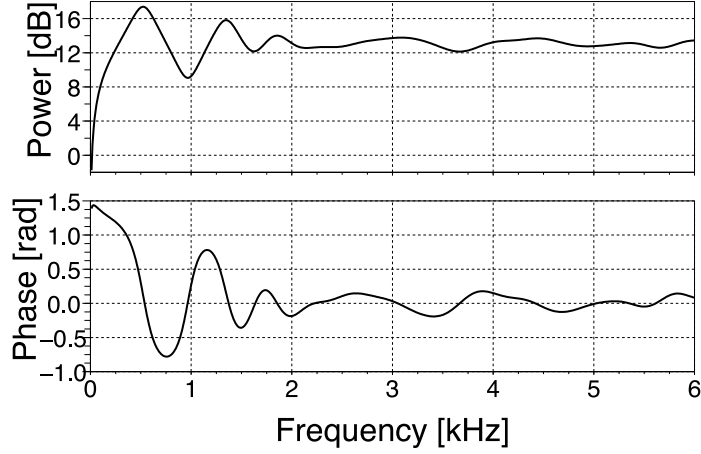


図 4.26 声門下の駆動点インピーダンス $Z_{Lg}(\omega)$ の周波数特性.

$$\text{where } Z'_m = \frac{A_m Z_m + B_m}{C_m Z_m + D_m} \text{ and } Z'_n = \frac{A_n Z_n + B_n}{C_n Z_n + D_n}. \quad (4.74)$$

上記の式から、声門下のインピーダンス Z_{Lg} は再帰的に求めることができる。

図 4.26 に求めた声門下のインピーダンス Z_{Lg} を示す。用いたパラメータは Fredberg らのパラメータ, Hudde と Slatky のデータ [a6], 日本人の MRI データ [b5, b6] を用いた。

デジタルフィルタモデルを実現するには、回路モデルにおいて集中定数素子の両側は分布定数線路でなくてはならない。したがって、求めた Z_{Lg} から気管 1 セクション分の特性インピーダンス R_t を抜き出す操作を行う。気管 1 セクションの $ABCD$ パラメータを A_t, \dots, D_t とすれば、 Z_{Lg} は

$$Z_{Lg} = (A_t Z'_{Lg} + B_t) / (C_t Z'_{Lg} + D_t). \quad (4.75)$$

と表すことができる。ここで、気管 1 セクションの $ABCD$ パラメータおよび、 R_t は非周波数依存として、周波数依存性は Z'_{Lg} へ追いやる。上式を変形すると

$$Z'_{Lg} = (B_t - D_t Z_{Lg}) / (C_t Z_{Lg} - A_t). \quad (4.76)$$

となり、気管 1 セクション分の特性インピーダンス R_t を抜き出した Z'_{Lg} が求まる。この操作により、声門下とその付近の回路モデルは図 4.27 のようになる。

境界 (a) における電流と電圧の関係により、次式が導かれる。

$$U_{Lg}^+(j\omega) = U_{Lg}^-(j\omega) + \frac{-2R_t U_{Lg}^-(j\omega) + P_a(j\omega)}{Z'_{Lg}(\omega) + R_t}. \quad (4.77)$$

上式から時間領域で進行波を計算するためには、分母を ARMA フィルタを用いて近似する必要がある。我々の方法では、

$$\frac{1}{Z'_{Lg}(\omega) + R_t} \approx T(s, \mathbf{P})$$

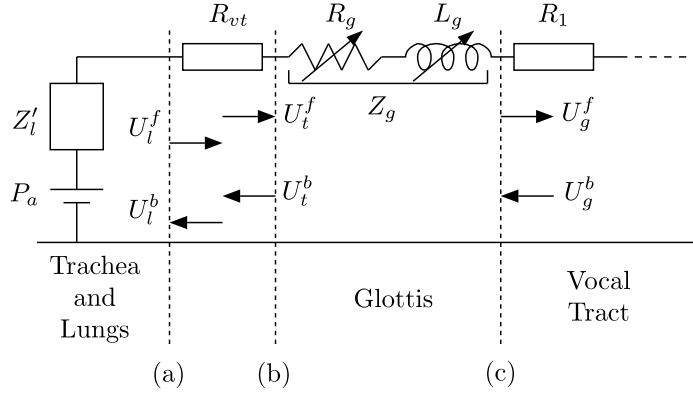


図 4.27 声門下の回路モデル [b14].

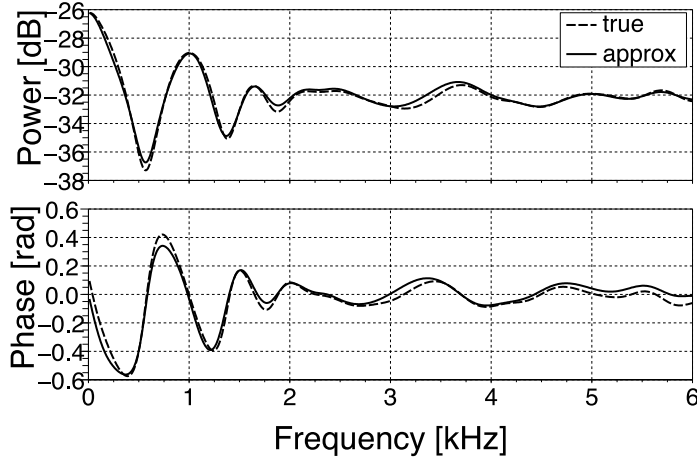


図 4.28 $1/(Z_{Lg}'(\omega) + R_t)$ に対する近似結果 $T(s, P)$.

$$= G \frac{s/\sigma_{11} + 1}{s/\sigma_{21} + 1} \prod_{k=2}^{26} \frac{(s/\alpha_{1k} + 1)(s/\overline{\alpha_{1k}} + 1)}{(s/\alpha_{2k} + 1)(s/\overline{\alpha_{2k}} + 1)} \quad (4.78)$$

$$\alpha_{mk} = \sigma_{mk} + j\omega_k \quad (m = 1, 2, k = 2, 3, \dots, 26)$$

のように、53/53 次 of s の有理多項式を用いて近似を行う。この近似結果を図 4.28 に示す。さらに、近似後のパラメータを表 4.4 に示す。

さらに、デジタルフィルタを実現するために、式 (4.78) から整合 z 変換を用いて z の有理多項式を求めると、

$$T(s, P) \approx T_z(z) = G \cdot g_1 \frac{z - r_{11}}{z - r_{21}} \prod_{k=2}^{26} g_k \frac{(z - z_{1k})(z - \overline{z_{1k}})}{(z - z_{2k})(z - \overline{z_{2k}})}, \quad (4.79)$$

となる。ここでパラメータ群は

$$r_{m1} = e^{-\sigma_{m1} T_s} \quad (m = 1, 2),$$

表 4.4 式 (4.78) における近似パラメータ.

Coefficients		Values			
$\omega_2 - \omega_5$	—	3567.26	6606.19	8545.13	10141.6
$\sigma_{1,1} - \sigma_{1,5}$	2498.73	753.02	2985.48	1018.12	2016.88
$\sigma_{2,1} - \sigma_{2,5}$	1252.76	1879.92	1599.63	2508.21	1405.64
$\omega_6 - \omega_{10}$	11718.1	13508.8	14451.3	15079.6	19666.4
$\sigma_{1,6} - \sigma_{1,10}$	1218.62	3500.08	1339.07	2158.79	3689.98
$\sigma_{2,6} - \sigma_{2,10}$	1701.12	2993.85	1513.91	1983.71	5499.08
$\omega_{11} - \omega_{15}$	23247.8	25132.7	26703.5	28148.7	31415.9
$\sigma_{1,11} - \sigma_{1,15}$	5000.91	2202.04	3007.25	2383.52	3085.40
$\sigma_{2,11} - \sigma_{2,15}$	3382.83	2701.79	2902.51	2990.66	2887.62
$\omega_{16} - \omega_{20}$	33929.2	35814.2	37385	38327.4	40086.7
$\sigma_{1,16} - \sigma_{1,20}$	2507.51	2592.06	2002.32	1812.06	2289.39
$\sigma_{2,16} - \sigma_{2,20}$	3007.07	2195.75	2289.42	1595.97	3210.74
$\omega_{21} - \omega_{25}$	43039.8	43668.1	44296.5	47595.1	50265.5
$\sigma_{1,21} - \sigma_{1,25}$	2995.18	1999.98	2995.52	1988.00	2402.62
$\sigma_{2,21} - \sigma_{2,25}$	2129.15	2994.95	2294.39	2907.25	1994.29
ω_{26}	52778.8				
$\sigma_{1,26}$	1973.39				
$\sigma_{2,26}$	2294.15				
G	0.0488				

$$\begin{aligned}
z_{mk} &= e^{-\alpha_{mk}T_s} \quad (m = 1, 2), \\
g_1 &= (1 - r_{21})/(1 - r_{11}), \\
g_k &= (1 - z_{2k})(1 - \bar{z}_{2k})/((1 - z_{1k})(1 - \bar{z}_{1k})), \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, 26),
\end{aligned}$$

となる.

したがって, 式 (4.77) の z 領域の表現は

$$U_{Lg}^+(z) = U_{Lg}^-(z) + \mathcal{T}_z(z)(-2R_t U_{Lg}^-(z) + P_a(z)), \quad (4.80)$$

となり, これをブロック図で表すと図 4.29 のようになる.

我々の数値実験において, 声門下を考慮しない場合は $Z'_{Lg}(j\omega) = 0$ を用いる. したがって, 声門下のデジタルフィルタモデルは図 4.30 のようになる.

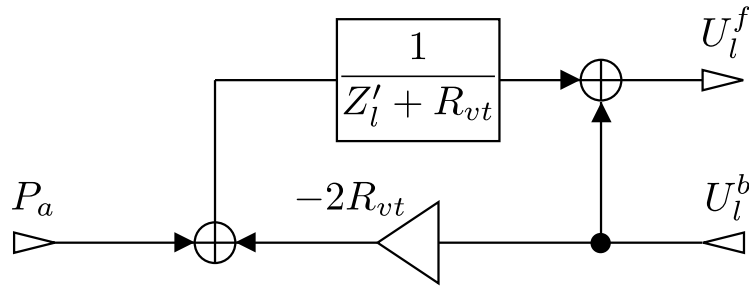


図 4.29 声門下のデジタルフィルタモデル (声門下インピーダンスあり).

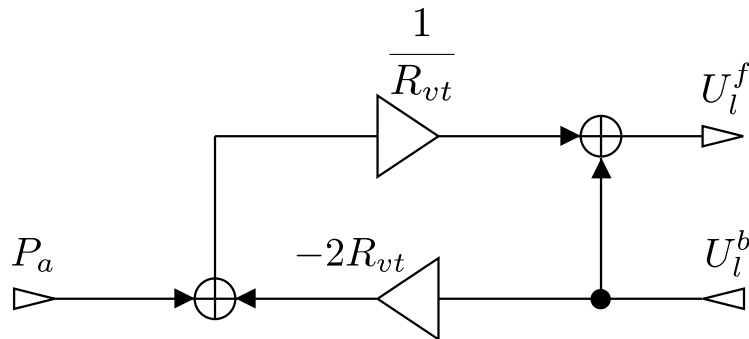


図 4.30 声門下のデジタルフィルタモデル (声門下インピーダンスなし).

4.9 実現したデジタルフィルタによる合成の結果と声門流に関する評価

我々の母音合成の数値実験において、声帯モデルに Two-mass モデルを用いる [b4]. すべての数値実験において Two-mass モデルに与えるパラメータはすべて同一のものとした. 声門下インピーダンスを考慮した場合としない場合の音声合成時の各ブロックの接続図をそれぞれ図 4.31, 図 4.32 に示す.

また、従来方法におけるデジタルフィルタモデルの実現の際には、声道の各区間における伝搬定数 $e^{-a_i(j\omega)l}$ と反射係数 $\mu_{i+1}(j\omega)$ において、定数としてみた場合の近似誤差を最小とする周波数 ω_i を選択し、その周波数での振幅のみを見た値 $e^{-a_i(j\omega_i)l}$, $\mu_{i+1}(j\omega_i)$ を使用する方法を用いた [a12, b7, b11].

以下の議論において、 $u_g(t)$ と $u_l(t)$ はそれぞれ声門部の体積速度と口唇部の体積速度を表す.

図 4.33 に日本語男性母音 /u/, /a/ の声道形状を用いて合成した $u_g(t)$ と $u_l(t)$ を示す. 声帯の振動が安定した部分を 1 ピッチだけ切り出し、さらに口唇部の体積速度は声道による伝搬遅延時間だけ差し引いて示している.

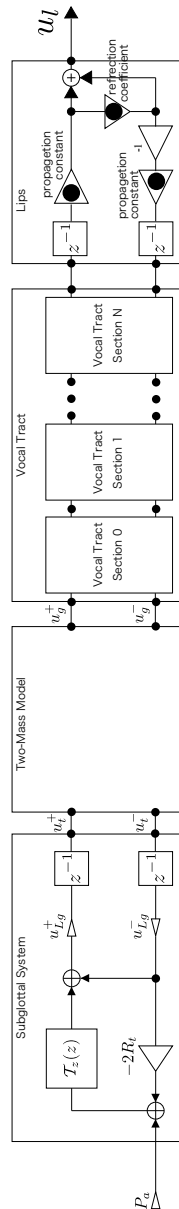


図 4.31 音声合成時の各ブロックの接続図 (声門下インピーダンスあり).

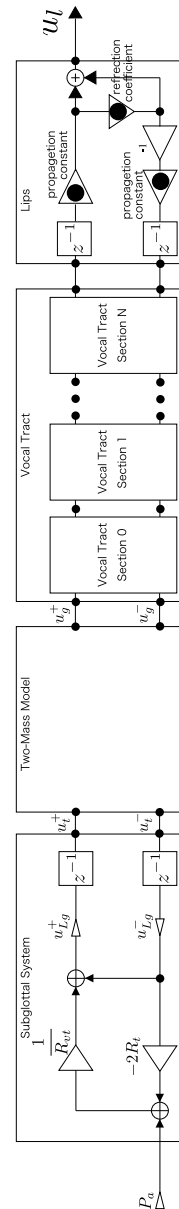


図 4.32 音声合成時の各ブロックの接続図 (声門化下インピーダンスなし).

まず始めに、声門下インピーダンスを考慮しない場合における $u_g(t)$ をみる。日本語男性母音/u/, /a/の両方の場合において、我々のデジタルフィルタモデルを用いた際には従来のデジタルフィルタモデルによる合成と比較してリップ成分が減少することが見て取れる。さらに、我々のデジタルフィルタモデルでは、声門の開区間がより長くなり、ピッチ周期が増加することが声門流の波形から見て取れる。これらの傾向は日本語男性母音/i/を用いた際にも同様にみられる。

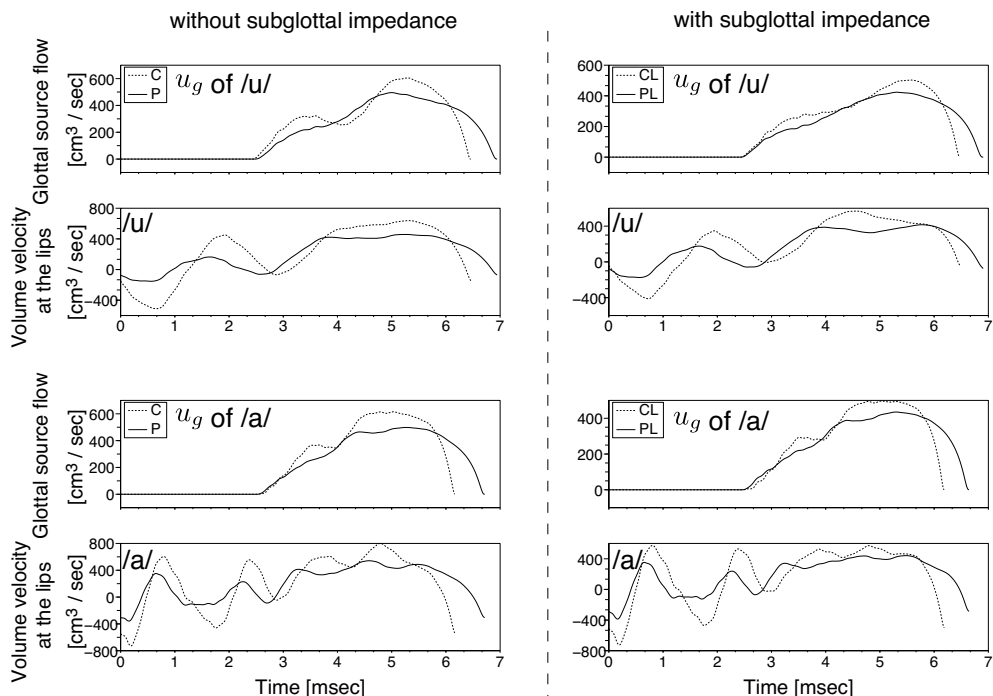


図 4.33 日本語男性母音/u/, /a/に対する合成波形。(P: 提案方法-声門下インピーダンス無し. C: 従来法-声門下インピーダンス無し. PL: 提案方法-声門下インピーダンス有り. CL: 従来法-声門下インピーダンス有り)

図 4.21 に示したように、従来のデジタルフィルタモデルと比較して、我々のモデルでは駆動点インピーダンスが低く、より短絡に近い。そのため、我々のモデルでは図 4.27 の境界 (c) における反射が強くなり、声門における体積速度は減少する。その結果、声門におけるベルヌーイ効果を減少させピッチ周期の増加を招くと考えられる。

また、声門下インピーダンスを考慮した場合の我々のモデルにおける $u_g(t)$ をみると、声門下インピーダンスを考慮しない場合と同様に、リップル成分の減少および、声門の開区間、ピッチ周期の増加がみられる。

日本語男性母音/u/, /a/について合成した声門流 $u_g(t)$ のスペクトルを図 4.34 に示す。図 4.34 に示すように、我々のモデルでは従来モデルと比較して、第 1 フォルマント周辺の振幅の平均レベルが減少していることが見て取れる。

以上より、声門下インピーダンスの考慮の有無に関わらず、我々のモデルでは従来モデルと比較してリップル成分が減少し、ピッチ周期が増加することが示された。

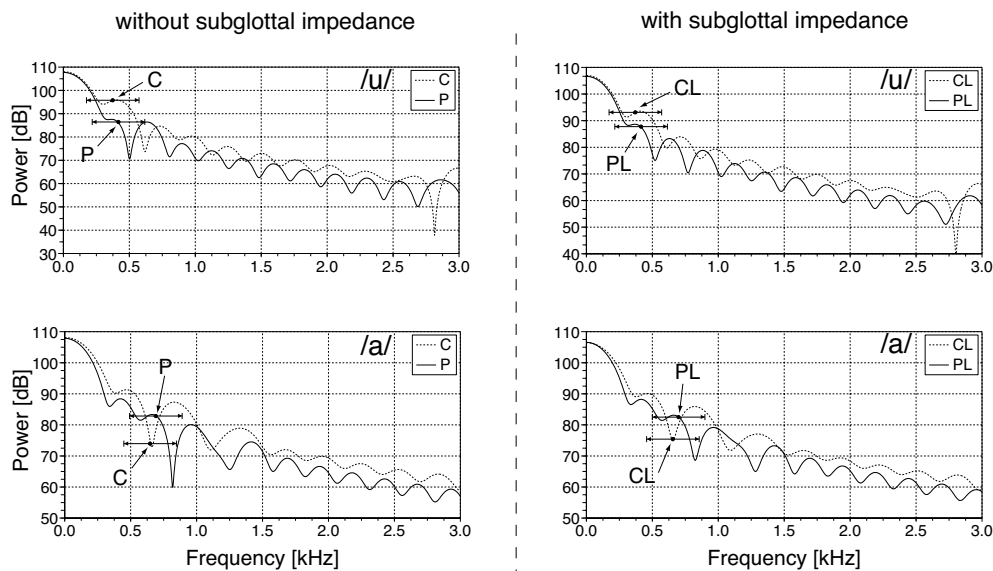


図 4.34 日本語男性母音/u/, /a/に対する声門流のスペクトル。(P: 提案方法-声門下インピーダンス無し, C: 従来法-声門下インピーダンス無し, PL: 提案方法-声門下インピーダンス有り, CL: 従来法-声門下インピーダンス有り, 水平棒は $F_1 \pm 200$ Hz の範囲を示す)

4.10 まとめ

本章では、声道アナログモデルをデジタルフィルタにより実現する際に、従来方法における問題点を述べた。従来方法では伝搬定数および反射係数に相当する部分を、ある周波数での振幅値をもって定数として近似していた。しかし、実際には周波数依存特性を持つため、特に周波数依存性の強い低周波数帯 (1kHz 以下) において近似精度が低下する問題があった。提案方法では伝搬定数および反射係数に相当する部分の近似精度を向上するために、それぞれ低次の ARMA フィルタと高次の MA フィルタを用いてその周波数特性を近似した。まずは周波数特性上での近似精度を検証し、従来のデジタルフィルタモデルと比較して、提案方法では極めて高精度なデジタルフィルタモデルを実現することが出来ることを示した。さらに、従来方法および提案方法を用いて音声を合成し、声門部における体積速度波形を比較した。その結果として、声門下インピーダンスの考慮の有無に関わらず、提案方法では従来方法と比較して体積速度波形に重畳するリップル成分が減少し、ピッチ周期が増加することが示された。

第5章

声道の3次元形状を考慮した合成モデルに対する提案方法と評価

5.1 はじめに

従来から、複雑な3次元形状を有する声道を簡単なモデルを用いて近似して解析する方法が用いられてきた [b2]。しかし、声道内を伝搬する音波が平面波であると仮定しているなど、その仮定が崩れる 4kHz 以上の周波数では解析精度が低下するなどといった問題がある。その一方で、近年の伝送路の広帯域化により、音声においても 4kHz を超える広帯域での伝送が期待されている。こういった流れの中で、より高い周波数での音声の生成を解析する目的で FEM を用いた 3次元声道形状に対する音響解析が行われ、簡単なモデルを用いた解析とは異なった知見が得られるようになり、3次元声道形状に対する音響解析が非常に期待されている。

その一方で、声道は複雑な形状を有しているため、自動的に FEM のためのメッシュを生成することが難しく、自動メッシュ生成アルゴリズムは実現されていない。そのため、メッシュ生成は非常に時間のかかる手作業を必要としているのが現状である。現在、声道形状に対してメッシュを生成するにはおよそ3ヶ月を要すると言われている。そのため、動的な調音における音響シミュレーションを行うのは不可能であるというのが現状である。

本章では、手作業を必要としない自動メッシュ生成アルゴリズムについて論じる。そして例として日本語男性母音の声道形状に対して生成したメッシュと、FEM および提案する DDM を用いて得られた解析結果を示す。提案方法は DDM に寄るところが大きいですが、その分割のアプローチから2つの分割を提案し、それぞれを提案方法1および提案方法2として後述している。そして、各々の方法を用いて予備的な音響解析の結果を示し、自動メッシュ生成アルゴリズムの実現可能性について論じる。

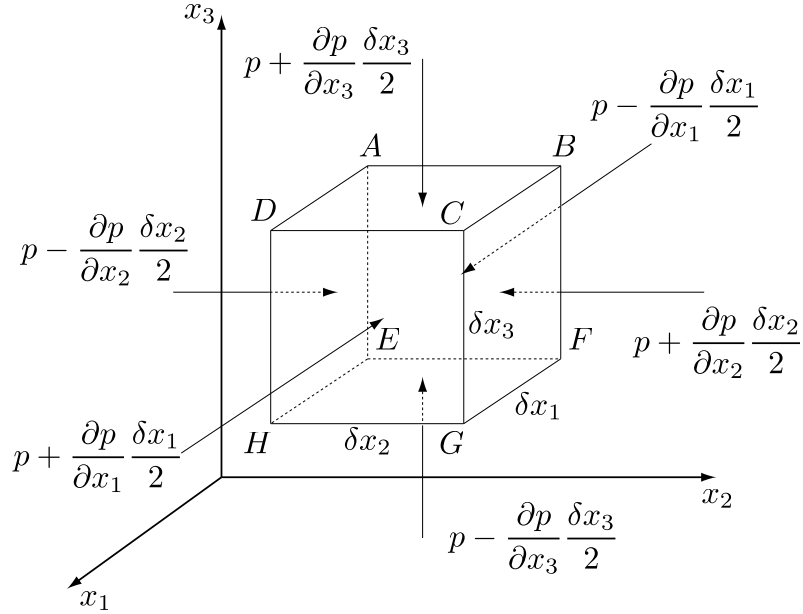


図 5.1 波動方程式の導出.

5.1.1 気体中の音場の波動方程式

ここでは、文献 [e4] を参考にして、気体中の波動方程式を導く。まず、図 5.1 に示すように、各辺がそれぞれ x_1, x_2, x_3 軸に平行で、長さが $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ の微小な直方体を仮定する。いま、中心 (x_1, x_2, x_3) での圧力変化を p とすると $ABFE$ 面での圧力変化は $p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2}$ 、その面に平行な $DCGH$ 面での圧力変化は $p - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2}$ と考えられるから、2面での力の差は

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2}\right) \delta x_2 \cdot \delta x_3 - \left(p - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2}\right) \delta x_2 \cdot \delta x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 \quad (5.1)$$

となる。また、中心での x_1 方向への変位が ξ_{x_1} で、微小体積が一体となって動き、しかもその内部の密度 ρ の変化が小さいとして、平均値をとって静圧での値とすれば、全質量は $\rho \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3$ となるから慣性力は

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{x_1}}{\partial t^2} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 \quad (5.2)$$

となり、次の運動方程式が成り立つ。

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{x_1}}{\partial t^2} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 \quad (5.3)$$

上式を整理すれば、

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{x_1}}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (5.4)$$

となり、 x_1 軸方向の振動速度を $\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} = v_{x_1}$ とすれば

$$\rho \frac{\partial v_{x_1}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (5.5)$$

となる。同様に x_2, x_3 軸方向についても、それぞれ次式が成り立つ。

$$\rho \frac{\partial v_{x_2}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (5.6)$$

$$\rho \frac{\partial v_{x_3}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (5.7)$$

次に、図 5.1 で、中心での変位が $\delta \xi_{x_1}$ であるから、 $ABFE$ 面と、これに平行な $DCGH$ 面での体積変化は、それぞれ

$$\left(\xi_{x_1} - \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \delta x_2 \cdot \delta x_3, \quad \left(\xi_{x_1} + \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \delta x_2 \cdot \delta x_3$$

となるから、 x_1 軸方向の体積変化は、上式の差をとって、

$$\left(\xi_{x_1} - \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \delta x_2 \cdot \delta x_3 - \left(\xi_{x_1} + \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\delta x_1}{2} \right) \delta x_2 \cdot \delta x_3 = -\frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3$$

となる。同様に、 x_2, x_3 軸方向の体積変化は

$$-\frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3, \quad -\frac{\partial \xi_{x_2}}{\partial x_2} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3$$

となる。したがって、直方体全体の体積変化の大きさ δV は

$$\delta V = \left(\frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{x_3}}{\partial x_3} \right) \delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3 \quad (5.8)$$

となる。ここで、体積弾性率を κ とすれば、はじめの体積が $\delta x_1 \cdot \delta x_2 \cdot \delta x_3$ であるから、圧力変化は

$$p = -\kappa \frac{\delta V}{V} = -\kappa \left(\frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_{x_3}}{\partial x_3} \right) \quad (5.9)$$

となる。

ここで、上式を時間 t で微分して

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial^2 \xi_{x_1}}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 \xi_{x_2}}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial^2 \xi_{x_3}}{\partial t \partial x_3} \right) \quad (5.10)$$

$$= -\kappa \left(\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} \right) \quad (5.11)$$

となる。

ここで、速度ポテンシャルというものを以下のように定義する。

$$v_{x_1} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (5.12)$$

$$v_{x_2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (5.13)$$

$$v_{x_3} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad (5.14)$$

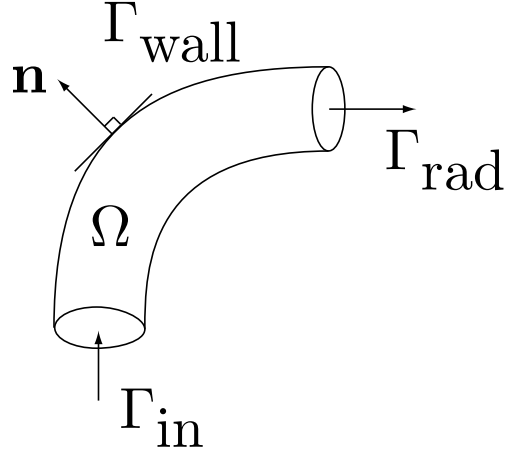


図5.2 境界条件の例. Γ_{wall} , Γ_{in} , Γ_{rad} はそれぞれ壁面, 駆動面, 放射面を表す.

ここで, 上式を式 (5.5), (5.6), (5.7) に代入し, それぞれ x_1 , x_2 , x_3 で積分すれば

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.15)$$

となる.

式 (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) を式 (5.11) に代入すれば,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{x}, t) \quad (5.16)$$

ここで, $c = \sqrt{\kappa/\rho}$ は音速である. これが波動方程式である.

式 (5.16) の両辺をラプラス変換すると次式が得られる.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \Phi(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.17)$$

速度ポテンシャル Φ から計算される音圧 $P(\mathbf{x}, \omega)$, \mathbf{x} 方向への粒子速度 $u_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega)$ はそれぞれ次式で表される.

$$P(\mathbf{x}, \omega) = j\omega\rho\Phi(\mathbf{x}, \omega) \quad (5.18)$$

$$u_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.19)$$

ここで, ρ は空気密度である.

境界条件

境界条件として, 図5.2に示すように駆動面 Γ_{in} , 壁面 Γ_{wall} , 放射面 Γ_{rad} からなる音場 Ω を考える. 駆動面を粒子速度 $u = u_0$ で駆動したとき, 境界に対する外向き法線方向

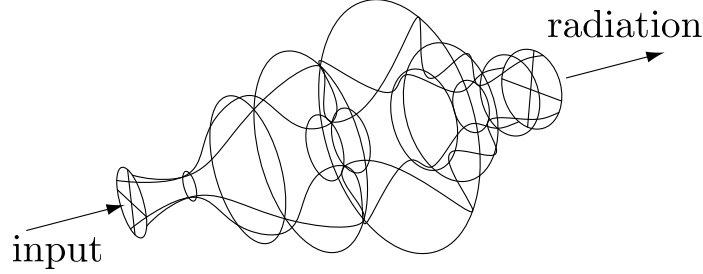


図 5.3 3次元形状の例題.

\mathbf{n} の微分を $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ とすると, それぞれの境界条件は次のようになる [d25].

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = -u_0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{in}} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{wall}} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{rad}} \quad (5.22)$$

ここで, ρ , Z_{wall} , Z_{rad} はそれぞれ空気の密度, 壁インピーダンスおよび放射インピーダンスである.

5.1.2 FEM における問題点

ここでは, まず波動方程式の弱形式化について述べるとともに, メッシュ生成の必要性を述べ, FEM における問題点を示す.

波動方程式の弱形式化

ここでは, 図 5.3 に示す 3次元形状において波動方程式を FEM を用いて解いた際の例を示す.

まず, 5.1.1 節の波動方程式と境界条件から弱形式を求める.

式 (5.17) の両辺に重み関数 $v(\mathbf{x})$ をかけて Ω で積分する.

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \Phi(\mathbf{x}, \omega) \right\} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.23)$$

上式の左辺に Green の公式を用いれば,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_2} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_3} v(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x} \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.24)$$

となる. さらに, 式 (5.20), (5.21), (5.22) に $v(\mathbf{x})$ をかけて, それぞれ Γ_{in} , Γ_{wall} , Γ_{rad} で積分すれば,

$$\int_{\Gamma_{\text{in}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Gamma_{\text{in}}} u_0 v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (5.25)$$

$$\int_{\Gamma_{\text{wall}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \int_{\Gamma_{\text{wall}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad (5.26)$$

$$\int_{\Gamma_{\text{rad}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \int_{\Gamma_{\text{rad}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (5.27)$$

となるから, これらを式 (5.24) に代入すると,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_{\text{in}}} u_0 v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \int_{\Gamma_{\text{wall}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \int_{\Gamma_{\text{rad}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_2} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_3} v(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x} \\ & = - \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.28)$$

となるから, これを整理して以下の弱形式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_1} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_2} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_3} \Phi(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial}{\partial x_3} v(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x} \\ & + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{wall}}} \int_{\Gamma_{\text{wall}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + j \frac{\omega \rho}{Z_{\text{rad}}} \int_{\Gamma_{\text{rad}}} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\omega^2}{c^2} \Phi(\mathbf{x}, \omega) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & = - \int_{\Gamma_{\text{in}}} u_0 v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.29)$$

図 5.4 に 8[kHz] における速度ポテンシャルの実部を示す.

FEM におけるメッシュ生成の必要性和問題点

計算機上において領域 Ω で積分を行う際に, 特別の場合を除いて数値積分を用いるが, 複雑な形状を一要素として積分することが実用的には難しい場合がある. そのため, 領域 Ω を有限個の要素に分割し, 各々の領域において積分を行い総和をとる. そのため, 複雑な形状に対して FEM を用いて解析する際にはメッシュを生成する必要がある. このとき, 生成されたメッシュにおいて図 5.5 に示すように要素間に重複がある場合や隙間がある場合は許容されない. また, 要素が極端に変形している場合も数値積分を行う際に誤差を生じる. これらの不適格要素が生じないようにメッシュ生成のプロセスに人間が介入して修正する必要がある. そのため, 形状が変化する度に膨大な時間をかけてメッシュを生成しなくてはならないという問題がある.

5.1.3 メッシュ生成に関する従来研究

従来より, メッシュ生成のコストを削減するために種々の方法が提案されている. Radial basis function を用いた方法は, メッシュ生成を行う必要が無く, さらに数値積分

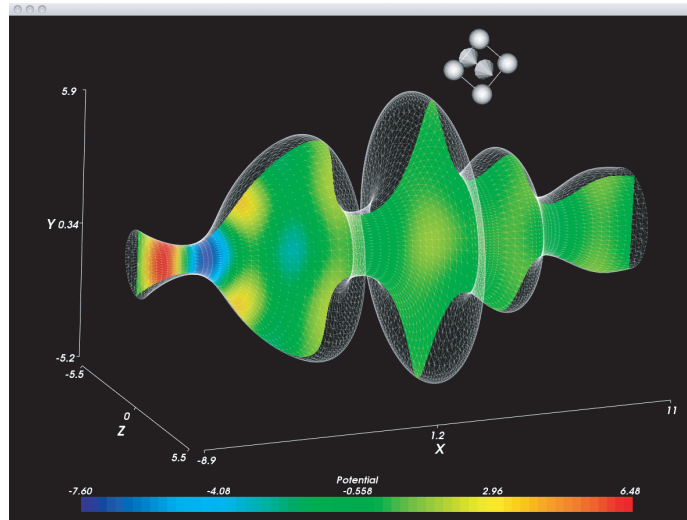


図 5.4 8 kHz における速度ポテンシャルの実部.

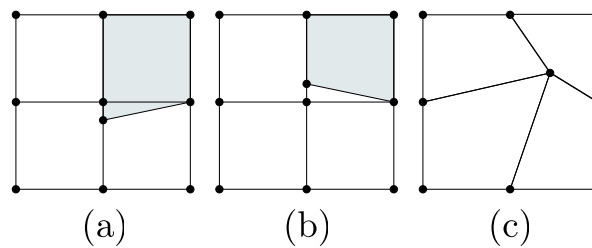


図 5.5 許容されない要素の例. (a):要素間に重複がある場合. (b):要素間に隙間がある場合. (c):要素が極端に変形している場合.

を必要としないため高速に数値解を得られる特徴がある。しかし、複雑な形状では誤差が非常に大きくなるという問題がある [c8, c3]。Spectral smoothed boundary method [c2] は、メッシュ生成の必要がなく近似解の基底として直交関数を用いるため数値積分の計算コストが非常に小さい特徴を持つ。しかし、細かい形状を精度よく近似しようとした際に解くべき行列のサイズが非常に大きくなるため、声道の音響解析には適さない、Radial point interpolation method [c10] や Meshless local Petrov-Galerkin method [c9] はメッシュ生成の必要は無いが、数値積分を行う際の計算コストが高いことに加えて得られる数値解の精度がパラメータに強く依存するため、解の精度を検証することが難しいという問題がある。

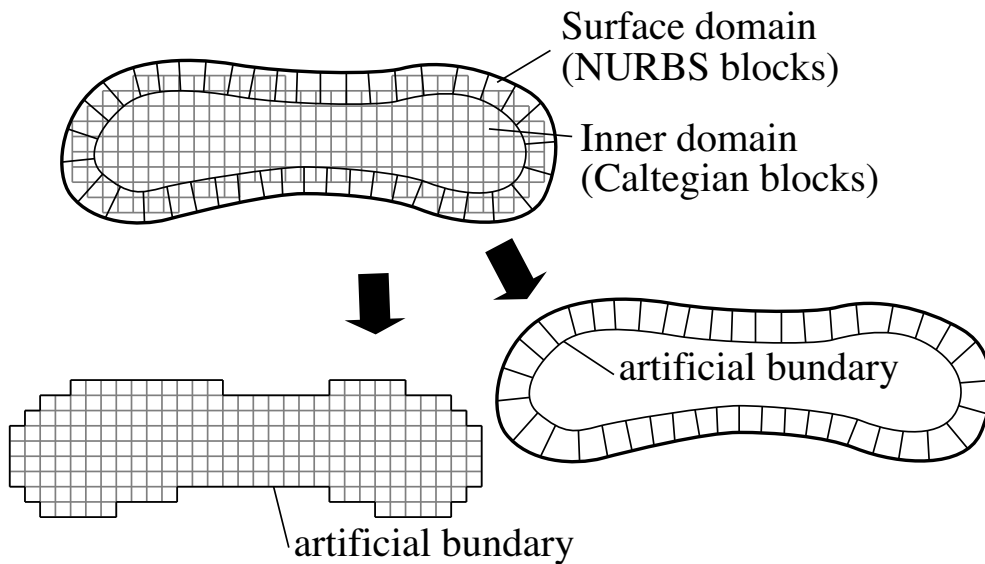


図 5.6 提案方法の概念図.

5.2 提案方法 1: 表面メッシュと内部メッシュへの分割によるメッシュ生成

提案方法 1 では、我々は声道の音響解析のための新しい自動メッシュ生成アルゴリズムを提案する。我々のアルゴリズムでは、図 5.6 に示すように、声道内部の領域を表面に沿った領域および内部領域の 2 領域に対してそれぞれメッシュを生成する。もし、このときに双方のメッシュに重複部分の存在が許容されるならば、メッシュ生成を困難にする要因の大半が解消される。Domain Decomposition Method (DDM) [d2] は重複する複数の領域において数値解を得る方法として知られている。そこで、我々は重複を持つメッシュ生成と、ソルバとして DDM を併用し、従来の自動メッシュ生成の問題を解決する。

さらに、提案方法 1 では高い次数においても条件数が悪化しにくい Spectral Element Method を導入し、Spectral Element Method と DDM の組み合わせによるソルバを提案する。さらに、声道表面を滑らかに近似するために Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) 曲面を導入し、メッシュ生成のアルゴリズムを提案する。

5.2.1 領域分割法 (Domain Decomposition Method:DDM) の導入

前章で述べたように、FEM 等の従来の数値解法において複雑な形状を扱う際には形状に対してメッシュを生成する必要がある。この際、生成されたメッシュにおいて要素間に重複がある場合や隙間がある場合は許容されない。また、要素が極端に変形している場合

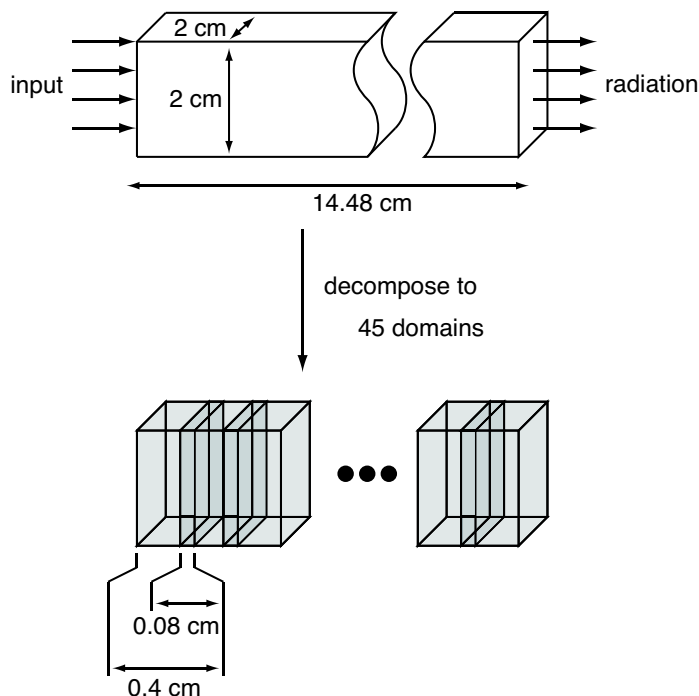


図 5.7 Chebyshev Collocation Method と DDM の数値実験のためのモデル.

も数値積分を行う際に誤差を生じる。これらの不適格要素が生じないようにメッシングプロセスのプロセスに人間が介入して修正する必要がある。そのため、形状が変化する度に膨大な時間をかけてメッシュを生成しなくてはならず音声合成モデルに应用するには何らかの対策を講じる必要がある。本研究では、メッシュ生成の際の計算コストを軽減するために 3.5 章で述べた DDM を導入する。

Chebyshev Collocation Method と DDM による予備実験

ここでは、DDM の有効性を検証するために簡単な数値実験を行い、その結果を示す。

本実験では使用したモデルは図 5.7 に示すような長さ 14.48 cm、高さ、奥行きともに 2 cm のダクトを用いる。境界条件として、入力端にはすべての周波数において $u_0 = \exp(j\omega_0)$ を与え、壁インピーダンスには式 (2.39) から計算した値を与える。また、放射インピーダンスには無限バッフルの放射インピーダンスの近似式からその値を与える [a12]。

領域は長さ方向のみに 45 分割し、それぞれの領域の長さは 0.4 cm とし、重複部分の長さは 0.08 cm とする。また、各領域において数値解法として Chebyshev Collocation Method (3.3) を用いており、Chebyshev 多項式の次数 N_x , N_y , N_z は 3 とする。

図 5.8 に求めた体積速度伝達関数を示す。この実験の条件ではダクト内を伝搬する音波はほぼ平面波であると仮定できるため、比較対象として分布定数線路モデルを用いて計算

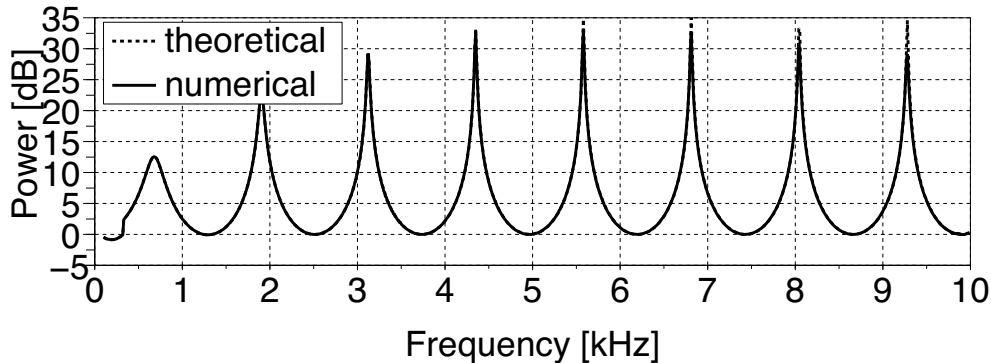


図 5.8 Chebyshev Collocation Method と DDM を用いて求めた体積速度伝達関数と理論値。

した体積速度伝達関数を理論値とした。図 5.8 から 0–10 kHz まで良好に特性が求まることがわかる。

さらに、Bézier 曲線を用いた変形要素と Chebyshev Collocation Method の有効性を検証するために簡単な数値実験を行い、その結果を示す。ここで、ダクトの壁面は声道と同程度の壁インピーダンスを与え、放射面は無限バツフルの放射インピーダンスを与えた。また、Chebyshev Collocation Method においては正規化座標系において伝搬方向に対して 24 次、またその他の方向に対しては 12 次の Chebyshev 多項式で展開した。FEM については伝搬方向に対して 28 分割、またその他の方向に対しては 13 分割となるように有限要素モデルを生成した。

5.2.2 メッシュ生成アルゴリズム

FEM (FEM) を用いた数値解析において、メッシュ生成の際に多大なコストがかかることがしばしば問題となる。そこで本研究では、図 5.9 に示すように滑らかな表面を NURBS で近似した 1 層の要素で覆い、内部は Cartesian Mesh を用いることでメッシュ生成の際のコストを軽減することを考える。さらに、双方の近似解を Domain Decomposition Method を用いることで収束させ、滑らかな形状における支配方程式の近似解を得る。

NURBS Mesh の生成フローを図 5.10 に示す。

本研究では、Standard Triangulated Language (STL) によって記述された形状データを用いて表面点の座標と表面点毎の法線ベクトルを求めている。まず、滑らかな表面形状を得るために、これらの表面情報から Multi-level Partition of Unity Implicits[c12] を用いることによって Implicit Function を構成する。次に構成した implicit function を用いて、STL によって記述された三角メッシュの最適化を行い、さらに 2 つの三角メッシュをみて条件を満たした場合は 1 つの四角メッシュとする。次に、三角メッシュおよび四角メッシュについて Non-Uniform Rational B-Spline(NURBS) を用いて implicit surface

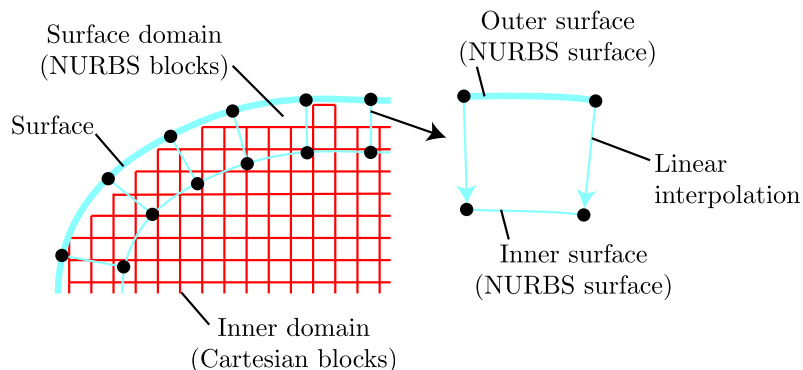


図 5.9 表面の NURBS Mesh と内部の Cartesian Mesh.

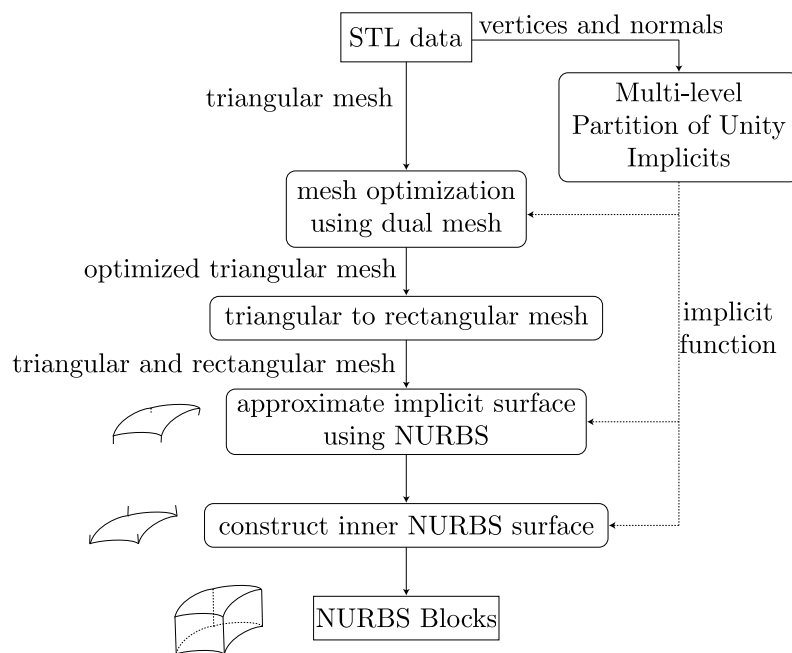


図 5.10 NURBS Mesh の生成フロー.

を近似する。最後に implicit surface を近似した NURBS 曲面のコントロールポイントを implicit function の勾配の逆方向へ任意の距離だけ移動することで内部の面を構成する。以下の節で各方法の詳細を述べる。

Multi-level Partition of Unity Implicits

本節では, Ohtake らの Multi-level Partition of Unity Implicits[c12] について述べる。まず, implicit surface とは implicit function により定義された曲面である。すなわち, 形状 Ω が implicit surface により定義されているとき, 表面は $f(\mathbf{x}) = 0$ の等値面により

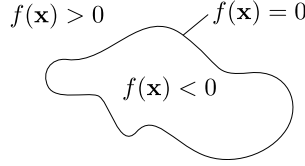


図 5.11 Implicit Surface.

定義され、 Ω 内は $f(\mathbf{x}) < 0$, Ω 外は $f(\mathbf{x}) > 0$ である (図 5.11).

つまり,

$$f(\mathbf{x}) \begin{cases} < 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is inside } \Omega \\ = 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is on the surface of } \Omega \\ > 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is outside } \Omega \end{cases} \quad (5.30)$$

である.

■Partition of Unity Partition of Unity の基本的な着想は空間的に広がる値をいくつかの小領域に分割し、それぞれの小領域において値を近似し、滑らかな重み関数を用いてそれぞれの小領域の近似値をブレンドすることである.

ある領域 Ω を考え,

$$\sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \text{ on } \Omega \quad (5.31)$$

を満たす partition of unity function $\varphi_i(\mathbf{x})$ を考える. ここで, $f(\mathbf{x})$ を領域 Ω における被近似関数とし, $Q_i(\mathbf{x})$ を小領域 Ω_i における近似関数とするならば, $f(\mathbf{x})$ は以下のように近似される.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) Q_i(\mathbf{x}) \quad (5.32)$$

このような条件を満たす $\varphi_i(\mathbf{x})$ を作るために以下の条件を満たす関数集合 $\{w_i(\mathbf{x})\}$ を考える.

$$\Omega \subset \bigcup_i \text{supp}(w_i(\mathbf{x})) \quad (5.33)$$

つまり, $w_i(\mathbf{x})$ が 0 をとらない範囲の和が Ω の全域を満たしているとき, partition of unity function $\varphi_i(\mathbf{x})$ は以下のように作ることが可能である.

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_j w_j(\mathbf{x})} \quad (5.34)$$

本研究では文献 [c12] を参考に, 関数 $w_i(\mathbf{x})$ に以下のような関数を用いた.

$$w_i(\mathbf{x}) = b \left(\frac{3|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i|}{2R_i} \right) \quad (5.35)$$

ここで, $b(t)$, \mathbf{c}_i , R_i はそれぞれ quadratic B-spline, Ω_i の中心座標, サポート範囲である. Ω_i は球形であることに注意されたい.

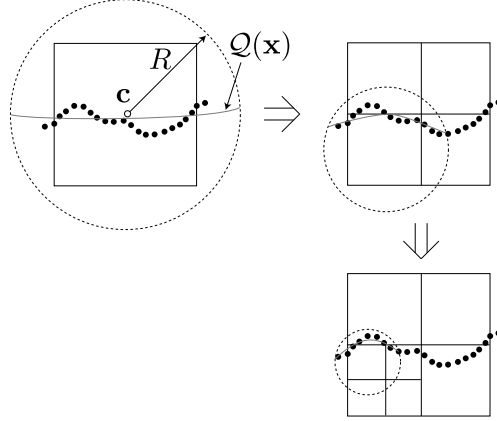


図 5.12 近似における小領域の生成過程.

Adaptive Octree-based Approximation Multi-level Partition of Unity Implicits では、形状の近似を行う際にその近似精度を評価し、精度が十分ではない場合にはデータを分割して再度近似し直すことにより近似精度を高める。ここでは文献 [c12] を参考にしてその方法について述べる。

まず与えられた頂点座標の集合を $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N\}$ 、各々の頂点における法線の集合を $\mathcal{N} = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_N\}$ とする。最初に \mathcal{P} についてバウンディングボックス $\mathcal{B} = \{\max_{x_1}, \min_{x_1}, \max_{x_2}, \min_{x_2}, \max_{x_3}, \min_{x_3}\}$ を求め、 \mathcal{P} を x_1, x_2, x_3 軸方向それぞれについて区間 $[0, 1]$ に正規化し、これを \mathcal{P}_n とする。また、これにともない、 \mathcal{N} の方向を計算し、これを \mathcal{N}_n とする。

次に、データを分割する際に用いる Cubic cell を考え、 \mathbf{c} をその中心、 d を対角線の長さとする。また、重み関数 (式 (5.35)) のサポート半径 R を以下のように定義する。

$$R = \alpha d \quad (5.36)$$

α は文献 [c12] を参考に $\alpha = 0.75$ とした。cell は近似アルゴリズム中において、近似精度が十分では無い場合にデータを分割するたびに生成され、ローカルな近似関数 $Q_i(\mathbf{x})$ は最小二乗法を用いて構成される。この過程の流れを図 5.12 に示す。ここで、領域を分割するか否かを判定する基準として、local max-norm approximation error ϵ を次式のよう定義する [c12]。

$$\epsilon = \max_{|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}| < R} |Q_i(\mathbf{p}_i)| / |\nabla Q_i(\mathbf{p}_i)| \quad (5.37)$$

もし、 ϵ が任意の定数 ϵ_0 より大きい場合にその領域を分割し、近似し直す。

さらに、重み関数 (式 (5.35)) のサポート半径 R 内に十分な個数 N_{\min} の頂点データが存在しない場合を考える。この場合は新しいサポート半径 \hat{R} を定義し、以下の式にしたがって N_{\min} 個の頂点データがサポート半径 \hat{R} に入るまで \hat{R} の更新を繰り返す。

$$\hat{R} = \hat{R} + \lambda R \quad (5.38)$$

表 5.1 Adaptive Octree-based Approximation Algorithm.

EvaluateMPUapprox(\mathbf{x} , ϵ_0)
$S_{w_Q} = S_w = 0$
root \rightarrow MPUapprox(\mathbf{x} , ϵ_0)
return S_{w_Q}/S_w
MPUapprox(\mathbf{x} , ϵ_0)
if ($ \mathbf{x} - \mathbf{c}_i > R_i$) then return;
if (Q_i is not created yet) then
Create Q_i and compute ϵ ;
if ($\epsilon_i > \epsilon_0$) then
if (No childs) then Create childs;
for each childe
child \rightarrow MPUapprox(\mathbf{x} , ϵ_0);
else
$S_{w_Q} = S_{w_Q} + w_i(\mathbf{x})Q_i(\mathbf{x})$;
$S_w = S_w + w_i(\mathbf{x})$;

ここで、 R は式 (5.36) により定義される初期サポート半径であり、 λ は任意の定数である。本研究では $\lambda = 0.1$ とした。

以上のアルゴリズムを表 5.1 に示す。

■ $Q_i(\mathbf{x})$ の近似法 ここでは、 $Q_i(\mathbf{x})$ の近似法について述べる。文献 [c12] では、形状の鋭さにより、3種類の近似法を使い分けているが、本研究では近似対象となる形状が十分に滑らかであることを仮定し、1つの方法のみを実装した。ここでは、その近似法について述べる。

まず、近似関数 $Q_i(\mathbf{x})$ を以下のように定義する。

$$Q(\mathbf{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2x_3 + a_6x_3x_1 + a_7x_1 + a_8x_2 + a_9x_3 + a_{10}$$

$$= \left[x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1, x_2, x_3, 1 \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

次に近似において最小化するべき誤差関数を以下のように定義する.

$$E = \frac{1}{\sum_i^n w(\mathbf{p}_i)} \sum_i^n w(\mathbf{p}_i) \mathcal{Q}(\mathbf{p}_i) + \frac{1}{m} \sum_i^m (\mathcal{Q}(\mathbf{q}_i) - d_i)^2 \quad (5.40)$$

ここで, d_i は以下の式により求まる推定距離である.

$$d_i = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_j) \quad (5.41)$$

ここで, \mathbf{q}_i は cubic cell の頂点の座標, \mathbf{p}_j , \mathbf{n}_j はそれぞれ \mathbf{q}_i に最も近い6個の頂点の座標とその法線である. また, cubic cell の8個の頂点について, その推定距離 d_i の信頼性を確かめるために, 以下の式の符号を最も近い6個の頂点全てについて調べ, 符号が異なるものが含まれている場合にはその推定距離 d_i は用いない. 式(5.40)における m はこの信頼性のテストをパスした推定距離 d_i の個数である.

$$\mathbf{n}_j \cdot (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_j) \quad (5.42)$$

さらに,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{(\mathbf{p}_1),1}^2 & x_{(\mathbf{p}_1),2}^2 & x_{(\mathbf{p}_1),3}^2 & x_{(\mathbf{p}_1),1}x_{(\mathbf{p}_1),2} & x_{(\mathbf{p}_1),2}x_{(\mathbf{p}_1),3} & x_{(\mathbf{p}_1),3}x_{(\mathbf{p}_1),1} & x_{(\mathbf{p}_1),1} & x_{(\mathbf{p}_1),2} & x_{(\mathbf{p}_1),3} & 1 \\ x_{(\mathbf{p}_2),1}^2 & x_{(\mathbf{p}_2),2}^2 & x_{(\mathbf{p}_2),3}^2 & x_{(\mathbf{p}_2),1}x_{(\mathbf{p}_2),2} & x_{(\mathbf{p}_2),2}x_{(\mathbf{p}_2),3} & x_{(\mathbf{p}_2),3}x_{(\mathbf{p}_2),1} & x_{(\mathbf{p}_2),1} & x_{(\mathbf{p}_2),2} & x_{(\mathbf{p}_2),3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(\mathbf{p}_n),1}^2 & x_{(\mathbf{p}_n),2}^2 & x_{(\mathbf{p}_n),3}^2 & x_{(\mathbf{p}_n),1}x_{(\mathbf{p}_n),2} & x_{(\mathbf{p}_n),2}x_{(\mathbf{p}_n),3} & x_{(\mathbf{p}_n),3}x_{(\mathbf{p}_n),1} & x_{(\mathbf{p}_n),1} & x_{(\mathbf{p}_n),2} & x_{(\mathbf{p}_n),3} & 1 \\ x_{(\mathbf{q}_1),1}^2 & x_{(\mathbf{q}_1),2}^2 & x_{(\mathbf{q}_1),3}^2 & x_{(\mathbf{q}_1),1}x_{(\mathbf{q}_1),2} & x_{(\mathbf{q}_1),2}x_{(\mathbf{q}_1),3} & x_{(\mathbf{q}_1),3}x_{(\mathbf{q}_1),1} & x_{(\mathbf{q}_1),1} & x_{(\mathbf{q}_1),2} & x_{(\mathbf{q}_1),3} & 1 \\ x_{(\mathbf{q}_2),1}^2 & x_{(\mathbf{q}_2),2}^2 & x_{(\mathbf{q}_2),3}^2 & x_{(\mathbf{q}_2),1}x_{(\mathbf{q}_2),2} & x_{(\mathbf{q}_2),2}x_{(\mathbf{q}_2),3} & x_{(\mathbf{q}_2),3}x_{(\mathbf{q}_2),1} & x_{(\mathbf{q}_2),1} & x_{(\mathbf{q}_2),2} & x_{(\mathbf{q}_2),3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(\mathbf{q}_m),1}^2 & x_{(\mathbf{q}_m),2}^2 & x_{(\mathbf{q}_m),3}^2 & x_{(\mathbf{q}_m),1}x_{(\mathbf{q}_m),2} & x_{(\mathbf{q}_m),2}x_{(\mathbf{q}_m),3} & x_{(\mathbf{q}_m),3}x_{(\mathbf{q}_m),1} & x_{(\mathbf{q}_m),1} & x_{(\mathbf{q}_m),2} & x_{(\mathbf{q}_m),3} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{w(\mathbf{p}_1)}{\sum_i w(\mathbf{p}_i)} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{w(\mathbf{p}_2)}{\sum_i w(\mathbf{p}_i)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{w(\mathbf{p}_n)}{\sum_i w(\mathbf{p}_i)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{m} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

と置けば, 誤差関数 E は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} E &= [\mathbf{Pa} - \mathbf{d}]^T \mathbf{W} [\mathbf{Pa} - \mathbf{d}] \\ &= [\mathbf{Pa}]^T \mathbf{W} [\mathbf{Pa}] - \mathbf{d}^T \mathbf{W} [\mathbf{Pa}] - [\mathbf{Pa}]^T \mathbf{W} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \\ &= [\mathbf{Pa}]^T \mathbf{W} [\mathbf{Pa}] - 2\mathbf{d}^T \mathbf{W} [\mathbf{Pa}] + \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.45)$$

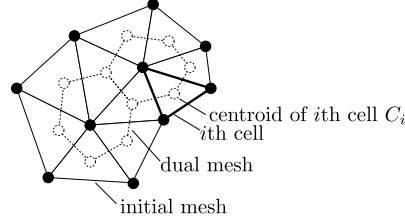


図 5.13 Dual mesh.

次に、 E が最小となるとき、 \mathbf{a} の微分値が 0 であるから、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} E = 2[\mathbf{aP}]^T \mathbf{W P} - 2\mathbf{d}^T \mathbf{W P} = 0 \quad (5.46)$$

したがって、

$$[\mathbf{aP}]^T \mathbf{W P} = \mathbf{d}^T \mathbf{W P} \quad (5.47)$$

両辺を転置して、

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W P} \mathbf{a} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \quad (5.48)$$

となるから、両辺に $\mathbf{P}^T \mathbf{W P}$ の逆行列をかけて、

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{P}^T \mathbf{W P}\}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \quad (5.49)$$

となり、係数 \mathbf{a} が求まる。

Dual Mesh を用いたメッシュ最適化

本節は文献 [c11] を参考にしている。

いま、形状 ω が陰関数によって定義されているとする。すなわち、

$$f(\mathbf{x}) \begin{cases} < 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is inside } \Omega \\ = 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is on the surface of } \Omega \\ > 0 & \text{if } \mathbf{x} \text{ is outside } \Omega \end{cases} \quad (5.50)$$

であるとする。

また、Marching Cube Method を用いて表面の三角メッシュ (initial mesh) が生成されているとする。メッシュ最適化の手順は、まず initial mesh の dual mesh を生成し、次に生成した dual mesh の dual mesh (double dual mesh) を生成し、それを最適化メッシュとする。図 5.14 に dual mesh を用いたメッシュ最適化のフローを示す。ここで、 N_p はメッシュ最適化の回数であり、本研究では $N_p = 10$ とした。

次節以降では dual mesh および、double dual mesh の生成方法について述べる。

■Dual Mesh の頂点生成 dual mesh の頂点として、各 cell の重心 \mathbf{C} を用いる。重心は各頂点の座標の平均として求まる。しかし求めた \mathbf{C} が implicit surface 上にある保証はない。そのため、 \mathbf{C} を implicit surface 上へ移動する操作を行う。表 5.2 へ dual mesh の頂点生成アルゴリズムを示す。ここで、subscript i は cell の番号を示す。

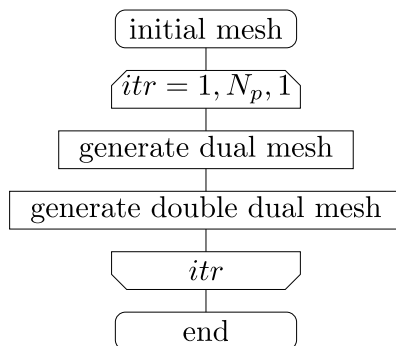


図 5.14 Dual mesh を用いたメッシュ最適化のフロー.

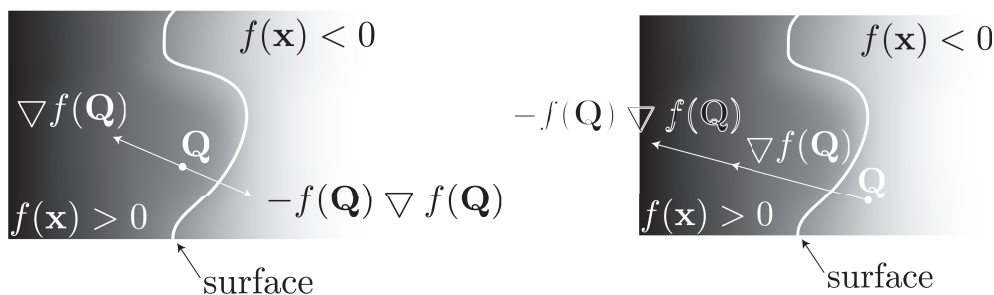


図 5.15 各ベクトルの関係. (左) Q が外部にある場合. (右) Q が内部にある場合.

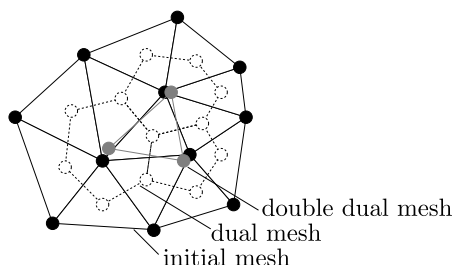


図 5.16 Double Dual Mesh.

アルゴリズム中の定数 ϵ は通常, 10^{-3} から 10^{-4} の値に設定する. また, λ は cell のエッジの長さの平均の $1/2$ 程度をとると良い.

■Dual Mesh の頂点から最適化メッシュ (Double Dual Mesh) の頂点生成 本説では, 前節で生成した dual mesh から最適化メッシュの頂点 G を求める方法として, Curvature-weighted vertex resampling について述べる. この方法では, 前節で生成した dual mesh のさらに dual mesh (double dual mesh) を生成し, 最適化メッシュとするのであるが, 重心を取る際に各頂点に対し重み w_i を乗じて和をとる. つまり, 最適化メッシュの頂点 G_j は以下のように求まる. ここで, subscript j は dual mesh の cell 番号を表す. ま

表5.2 dual mesh の頂点生成アルゴリズム.

$C_i \leftarrow \text{centroid of } i\text{th cell}$ $P_i \leftarrow C_i$ if $ f(P_i) > \epsilon$ $R_i \leftarrow P_i$ $Q_i \leftarrow R_i$ while $f(Q_i)f(R_i) > 0$ $Q_i \leftarrow R_i$ $d \leftarrow -f(Q_i) \nabla f(Q_i)$ $d \leftarrow d/ d $ $R_i \leftarrow Q_i + \lambda d$ end 線分 $Q_i R_i$ 上で $ f(P)_i < \epsilon$ を満たす P_i を探索 end	$\leftarrow f(Q_i)$ と $f(R_i)$ が同じ符号であれば Q_i と R_i は共に内側か外側にある. $\leftarrow Q_i$ における implicit surface への 方向を求める \leftarrow ベクトルの正規化 $\leftarrow Q_i$ を implicit surface の方向へ 距離 λ だけ移動した座標を R_i へ格納 \leftarrow ループの終了時には $f(Q_i)$ と $f(R_i)$ の符号が異なっているから Q_i と R_i は implicit surface を挟み 互いに反対側にある
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

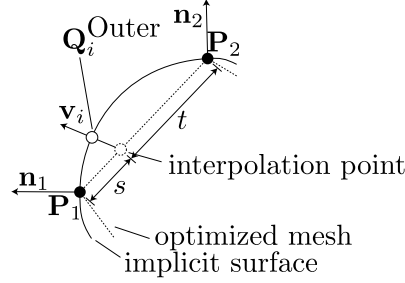
た, N_j は j 番目の cell を構成する頂点の数である. P_i は j 番目の cell を構成する頂点である.

$$\mathbf{G}_j = \frac{\sum_{i=1}^{N_j} w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{N_j} w_i} \quad (5.51)$$

また, 重み w_i は以下の式を用いる.

$$w_i = 1 + ck_i, \quad k_i = \sum_{p=1}^{N_j} \frac{\arccos(\mathbf{n}(\mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{P}_p))}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_p\|} \quad (5.52)$$

ここで, $\mathbf{n}(\mathbf{P}_i)$ は点 \mathbf{P}_i における法線ベクトルである. また, 定数 c は実験的に最適値が決定する. 本研究では $c = 2$ とした. $\arccos(\mathbf{n}(\mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{P}_p)) / \|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_p\|$ は, \mathbf{P}_i における \mathbf{P}_p の方向への方向付き曲率を推定する.

図 5.17 外部メッシュの補間点 Q_i^{Outer} の計算方法の概念図.

外部メッシュの補間点 Q_i^{Outer} の計算方法

ここでは、最適化済みメッシュと implicit surface を用いて、補間点 Q_i^{Outer} を計算する方法を述べる。ここでは簡単のために、まず、2次元の場合について述べ、次に式を3次元の場合に拡張する。

図 5.17 に示すように、implicit surface 上に最適化済みメッシュの頂点 P_1 , P_2 があるとする。最初に、線分 P_1P_2 上に初期補間点 Q_i^{Outer} を、以下の式にしたがって置く。

$$Q_i^{\text{Outer}} = \frac{iP_2 + (m-1-i)P_1}{m-1} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1). \quad (5.53)$$

ここで、 m は補間点の個数である。

次に、初期補間点を implicit surface 上へ移動するために、移動する方向のベクトル v_i を考える。本研究では、次式によって求まるベクトルを v_i として採用する。

$$v_i = \frac{s_i n_2 + t_i n_1}{s_i - t_i}. \quad (5.54)$$

ここで、 n_1 , n_2 はそれぞれ、 P_1 , P_2 における法線ベクトルである。また、 s_i , t_i は、それぞれ $P_1Q_i^{\text{Outer}}$ 間および $P_2Q_i^{\text{Outer}}$ 間の Euclidean distance であるが、式 (5.54) において Q_i^{Outer} と P_1 , P_2 への距離の比として扱うため、次式の定義でもよい。本研究では曲面への拡張の容易さから、次式を採用する。

$$s_i = \frac{i}{m-1}, \quad (5.55)$$

$$t_i = \frac{m-1-i}{m-1}. \quad (5.56)$$

したがって、式 (5.54) は以下のように書ける。

$$v_i = \frac{in_2 + (m-1-i)n_1}{m-1} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1). \quad (5.57)$$

次に、 Q_i^{Outer} を implicit surface 上へ移動するアルゴリズムであるが、これは表 5.2 において $\nabla f(Q_i)$ を v_i へ置き換えたものに等しい。

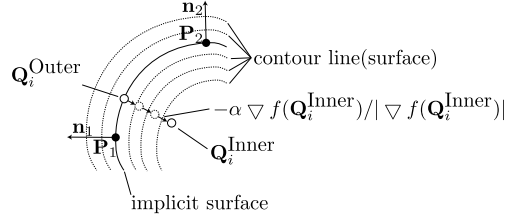


図 5.18 内部メッシュの補間点 Q^{Inner} の計算方法の概念図.

■3次元への拡張 以上を 3 次元へ拡張したとき，最適化済みメッシュが頂点 P_1, P_2, P_3, P_4 から構成されるとする．このとき，式 (5.53)，式 (5.57) はそれぞれ以下のようになる．

$$Q_{i,j} = \frac{i}{m-1} \frac{(n-1-j)}{n-1} P_2 + \frac{(m-1-i)}{m-1} \frac{(n-1-j)}{n-1} P_1 + \frac{i}{m-1} \frac{j}{n-1} P_3 + \frac{(m-1-i)}{m-1} \frac{j}{n-1} P_4, \quad (5.58)$$

$$v_{i,j} = \frac{i}{m-1} \frac{(n-1-j)}{n-1} \mathbf{n}_2 + \frac{(m-1-i)}{m-1} \frac{(n-1-j)}{n-1} \mathbf{n}_1 + \frac{i}{m-1} \frac{j}{n-1} \mathbf{n}_3 + \frac{(m-1-i)}{m-1} \frac{j}{n-1} \mathbf{n}_4. \quad (5.59)$$

内部メッシュの補間点 Q^{Inner} の計算方法

ここでは，内部の NURBS Surface の構成方法を述べる．

Q^{Outer} を初期補間点 Q^{Inner} とし，Implicit function の正規化勾配 $\mathbf{d}_i = \nabla f(Q_i^{\text{Inner}}) / |\nabla f(Q_i^{\text{Inner}})|$ の逆方向へ，徐々に，進行させることにより，内部メッシュの補間点 Q^{Inner} を生成する．内部メッシュの補間点 Q^{Inner} の計算方法の概念を図 5.18 に示す．

声道形状に対するメッシュ生成の結果

図 5.19 に提案方法を用いて生成した日本語男性母音/a/に対してメッシュを示す．最も複雑な分岐部分の形状に対して滑らかなメッシュが生成できていることが分かる．

5.2.3 提案するメッシュに適したソルバ

近年，偏微分方程式のソルバに対して並列化アルゴリズムが着目され，盛んに研究が行われている．その中でも，本研究で提案するメッシュ生成アルゴリズムに最も良く適応する並列化アルゴリズムとして DDM[d2] が挙げられる．DDM では，図 5.20 に示すように声道全体の領域 Ω を小領域 Ω_i へ分割する．その結果として， Ω_i における解くべき行

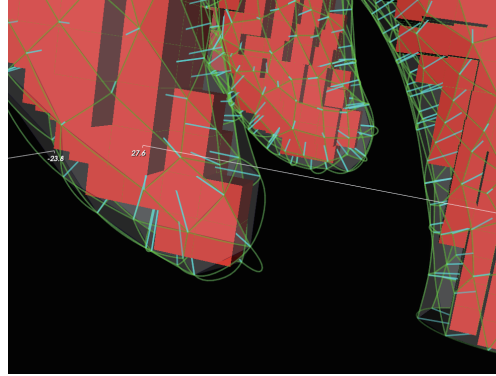


図 5.19 日本語男性母音/a/に対して生成したメッシュ. 赤色: Inner block, 緑色: Outer surface, 水色: Outer surface と Inner surface を結ぶ線. Inner Surface は Inner block に埋没しているため, この図では見ることができない.

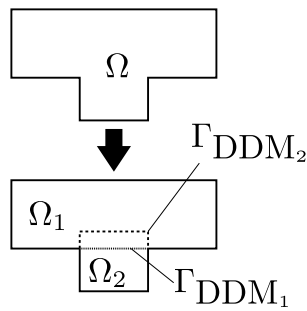


図 5.20 領域分割の概念図.

列のサイズと条件数が Ω におけるそれらよりも小さくなるため, 計算時間が短縮されるとともに計算誤差も小さくなる. また, DDM は並列計算に非常に適しているため, 更なる計算時間の短縮が期待できる.

DDM を採用するにあたり, 本研究では Ω を Surface block に相当する Ω_1 と Inner block に相当する Ω_2 へ分割する. ここで, Ω_1 と Ω_2 は必ず重複部分を持つ. つまり, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ である. さらに, 人工境界と呼ばれる $\Gamma_{DDM_1} = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ と $\Gamma_{DDM_2} = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ において, 波動方程式を解く場合には以下の境界条件を課すことで解が安定に求まることが知られている [d2].

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} \Phi_1 + \alpha \Phi_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_1} \Phi_2 + \alpha \Phi_2 \text{ on } \Gamma_{DDM_1} \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} \Phi_2 + \alpha \Phi_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_2} \Phi_1 + \alpha \Phi_1 \text{ on } \Gamma_{DDM_2} \quad (5.61)$$

ここで, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ はそれぞれ Γ_1, Γ_2 における法線ベクトルである. また, α は任意の定数であるが, この選び方について単純な形状において最適な値の選定方法が提案されてい

表 5.3 DDM を用いたソルバのアルゴリズム.

ステップ番号	対象領域	処理内容
Step 1.	Ω_1	行列 \mathbf{K}^{Ω_1} , \mathbf{M}^{Ω_1} , $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{wall}_1}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{rad}_1}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{DDM}_1}}$ およびベクトル $\mathbf{f}^{\Gamma_{\text{in}_1}}$ を計算する ($\alpha = 1$, $\beta = 2$ として式 (5.64), (5.65), (5.66), (5.67), (5.68), (5.69) を計算)
Step 2.	Ω_1	$\Phi_2 = 0$ であるという初期値のもと, 領域 1 について Φ_1 を求める ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\mathbf{u}^{\text{DDM}_1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^{\text{DDM}_1} = \mathbf{0}$ として式 (5.63) を \mathbf{a}^{Ω_1} について解く)
Step 3.	Ω_2	行列 \mathbf{K}^{Ω_2} , \mathbf{M}^{Ω_2} , $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{wall}_2}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{rad}_2}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{DDM}_2}}$ およびベクトル $\mathbf{f}^{\Gamma_{\text{in}_2}}$ を計算する ($\alpha = 2$, $\beta = 1$ として式 (5.64), (5.65), (5.66), (5.67), (5.68), (5.69) を計算)
Step 4.	Ω_2	ベクトル $\mathbf{g}^{\text{DDM}_2}$, $\mathbf{h}^{\text{DDM}_2}$ を計算する ($\alpha = 2$, $\beta = 1$ として式 (5.70), (5.71) を計算)
Step 5.	Ω_2	Φ_2 を求める ($\alpha = 2$, $\beta = 1$ として式 (5.63) を \mathbf{a}^{Ω_2} について解く)
Step 6.	Ω_1	ベクトル $\mathbf{g}^{\text{DDM}_1}$, $\mathbf{h}^{\text{DDM}_1}$ を計算する ($\alpha = 1$, $\beta = 2$ として式 (5.70), (5.71) を計算)
Step 7.	Ω_1	Φ_1 を求める ($\alpha = 1$, $\beta = 2$ として式 (5.63) を \mathbf{a}^{Ω_1} について解く)
Step 8.	$\Omega_1 \& \Omega_2$	収束判定を行い, 収束している場合は 終了 , 収束していない場合は Step 4 へ, ($\alpha = 1$ および $\alpha = 2$ 双方の場合において式 (5.72) を満たしたとき 終了)

る [c6]. しかし, 任意の形状については最適な値は求まらず, 一般的には $\alpha = j\omega/c$ が用いられている [d2].

DDM を用いた際の解くべき弱形式は以下ようになる. ここでは領域番号を α , β として, Ω_β の数値解 Φ_β を参照した場合の Ω_α における弱形式を以下に示す.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\alpha} \nabla \Phi_\alpha \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_\alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} v \, d\mathbf{x} \\
& + \frac{j\omega\rho}{Z_{\text{wall}}} \int_{\Gamma_{\text{wall}_\alpha}} \Phi_\alpha v \, d\mathbf{x} + \frac{j\omega\rho}{Z_{\text{rad}}} \int_{\Gamma_{\text{rad}_\alpha}} \Phi_\alpha v \, d\mathbf{x} \\
& + \frac{j\omega}{c} \int_{\Gamma_{\text{DDM}_\alpha}} \Phi_\alpha v \, d\mathbf{x} = -u_0 \int_{\Gamma_{\text{in}_\alpha}} v \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Gamma_{\text{DDM}_\alpha}} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \mathbf{n}_\alpha} v \, d\mathbf{x} + \frac{j\omega}{c} \int_{\Gamma_{\text{DDM}_\alpha}} \Phi_\beta v \, d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

ここで,

さらに, 行列, ベクトル表現は

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mathbf{K}^{\Omega_\alpha} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{M}^{\Omega_\alpha} + \frac{j\omega\rho}{Z_{\text{wall}}} \mathbf{M}^{\Gamma_{\text{wall}_\alpha}} \right. \\
& \left. + \frac{j\omega\rho}{Z_{\text{rad}}} \mathbf{M}^{\Gamma_{\text{rad}_\alpha}} + \frac{j\omega}{c} \mathbf{M}^{\Gamma_{\text{DDM}_\alpha}} \right\} \mathbf{a}^{\Omega_\alpha} \\
& = -u_0 \mathbf{f}^{\Gamma_{\text{in}_\alpha}} + \mathbf{g}^{\text{DDM}_\alpha} + \frac{j\omega}{c} \mathbf{h}^{\text{DDM}_\alpha}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

となる. ここで, 行列 $\mathbf{K}^{\Omega_\alpha}$, $\mathbf{M}^{\Omega_\alpha}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{wall}_\alpha}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{rad}_\alpha}}$, $\mathbf{M}^{\Gamma_{\text{DDM}_\alpha}}$ およびベクトル

$f^{\Gamma_{\text{in}\alpha}}$, $g^{\text{DDM}\alpha}$, $h^{\text{DDM}\alpha}$ の各要素の値はそれぞれ以下ようになる.

$$K_{ij}^{\Omega\alpha} = \int_{\Omega\alpha} \nabla\psi_i \cdot \nabla\psi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.64)$$

$$M_{ij}^{\Omega\alpha} = \int_{\Omega\alpha} \psi_i\psi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.65)$$

$$M_{ij}^{\Gamma_{\text{wall}\alpha}} = \int_{\Gamma_{\text{wall}\alpha}} \psi_i\psi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.66)$$

$$M_{ij}^{\Gamma_{\text{rad}\alpha}} = \int_{\Gamma_{\text{rad}\alpha}} \psi_i\psi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.67)$$

$$M_{ij}^{\Gamma_{\text{DDM}\alpha}} = \int_{\Gamma_{\text{DDM}\alpha}} \psi_i\psi_j \, d\mathbf{x} \quad (5.68)$$

$$f_i^{\Gamma_{\text{in}\alpha}} = \int_{\Gamma_{\text{in}\alpha}} \psi_i \, d\mathbf{x} \quad (5.69)$$

$$g_i^{\text{DDM}\alpha} = \int_{\Gamma_{\text{DDM}\alpha}} \frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\mathbf{n}_\alpha} \psi_i \, d\mathbf{x} \quad (5.70)$$

$$h_i^{\text{DDM}\alpha} = \int_{\Gamma_{\text{DDM}\alpha}} \Phi_\beta \psi_i \, d\mathbf{x} \quad (5.71)$$

次に, 図 5.21 に提案するソルバのフローチャートの外観を示し, さらに DDM を用いたソルバのアルゴリズムの具体的な例を表 5.3 示す. 本稿の数値実験では, Step 8 の収束判定において以下の式を満たしたとき収束していると判定した.

$$\frac{|\mathbf{a}^{\Omega\alpha} - \text{pre}\mathbf{a}^{\Omega\alpha}|}{|\mathbf{a}^{\Omega\alpha}|} < \epsilon \quad (5.72)$$

ここで, $\text{pre}\mathbf{a}^{\Omega\alpha}$ は前収束ループ (Step 4-8) における $\mathbf{a}^{\Omega\alpha}$ の値である. また, 本稿では $\epsilon = 1.0 \times 10^{-2}$ とした.

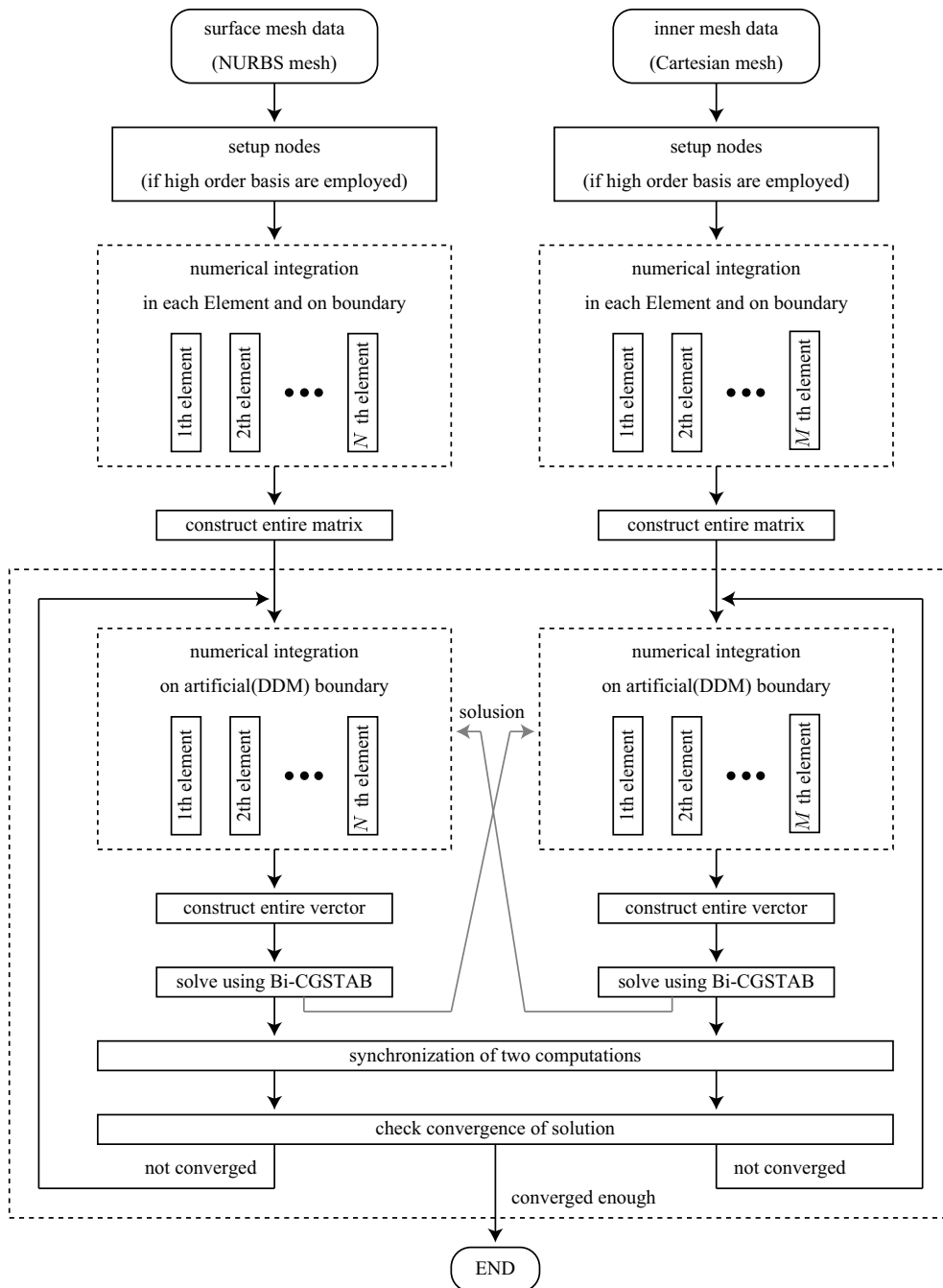


図 5.21 提案するソルバのフローチャートの外観。

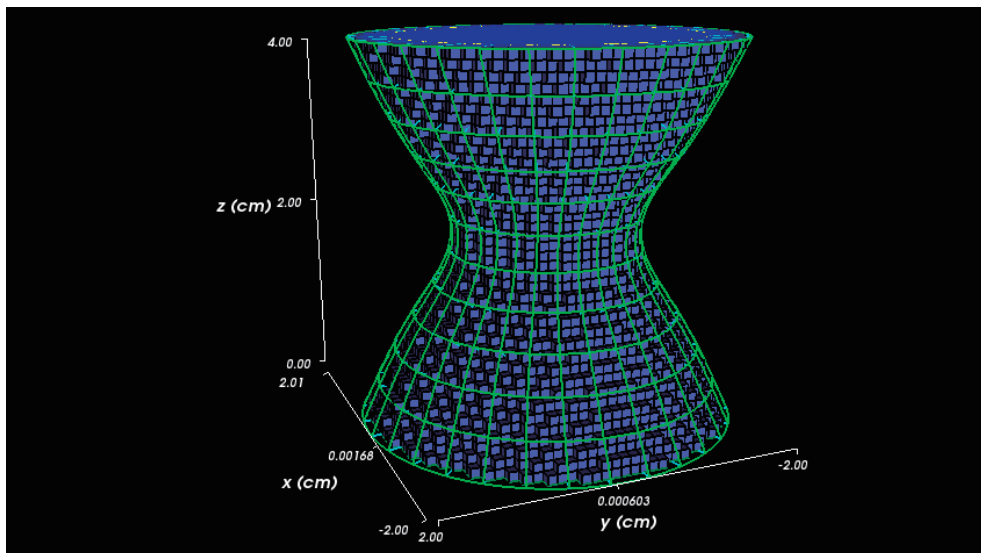


図 5.22 試験用に生成したメッシュ.

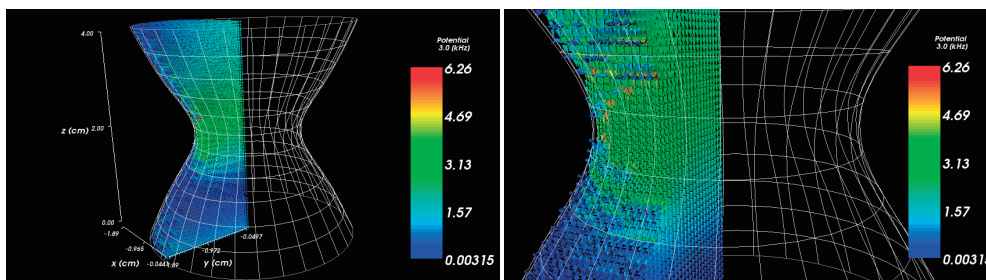


図 5.23 Surface blocks を用いずに解析した体積速度分布 (3kHz) と狭窄部分を拡大した体積速度分布. 直交格子のみでは各々のエッジ部分に誤差が生じる.

5.2.4 Spectral Element Method と DDM による数値実験

表 5.4 試験用に生成したメッシュのプロパティ.

	Inner blocks	Surface blocks
要素数	24314	341
評価点数	211145	27900
基底関数の次数	5 次	2 次

ここでは、図 5.22 に示すような狭窄を持った円筒形上に対して生成したメッシュに対して、音響解析を行った結果を示す。メッシュのプロパティを表 5.4 に示す。

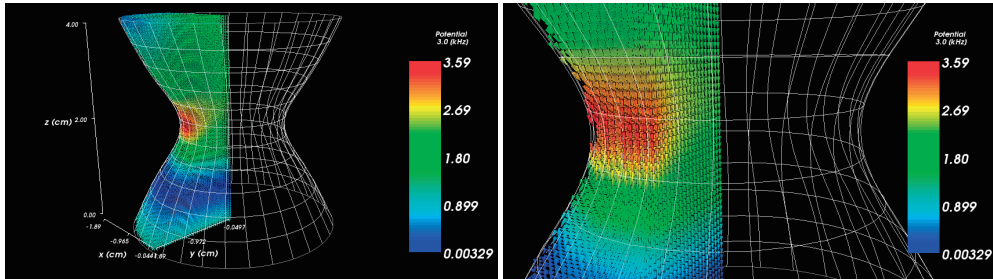


図 5.24 Surface Mesh を用いて DDM によって解析した体積速度分布 (3kHz) と狭窄部分を拡大した体積速度分布. 直交格子のみの解析に見られたエッジ部分の誤差が見られない.

まず, 図 5.23 に Surface blocks を用いずに, Inner blocks のみを用いた解析結果を示す. Inner blocks には直交格子を採用しているため, Surface blocks を用いない場合では, 直交格子のエッジに誤差が生じる傾向が見られる.

次に, 図 5.24 に Surface blocks を用いて DDM により数値解が十分に収束した後の解析結果を示す. Inner blocks のみを用いて解析した結果に見られるようなエッジにおける誤差が生じていない事が分かる. このことから, 滑らかな表面形状を高精度に近似した Surface blocks と内部の形状を荒く近似した Inner blocks における各々の数値解が意図したように統合できていると思われる.

ただし, 特定の周波数において数値解が収束せずに発散する問題が生じている. このとき, 人工境界の境界条件である式 (5.60) における任意定数 α を変更する事により, 数値解が安定する事が確認できている.

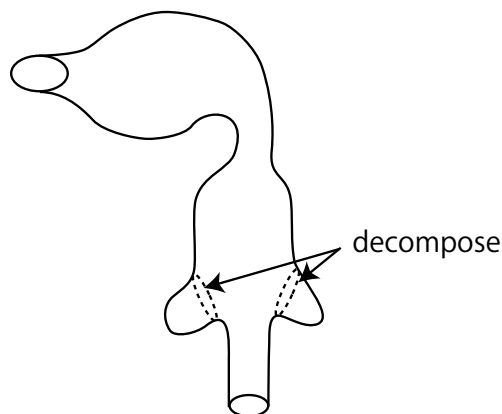


図 5.25 声道の分岐部分での領域分割の概観.

5.3 提案方法 2: 分岐部分における分割によるメッシュ生成

提案方法 1 における表面メッシュと内部メッシュへの領域分割の方法では、内部メッシュの人工境界に不連続点による数値誤差に引きずられる形で DDM による数値解の統合が破綻する場合があった。声道形状を複雑としている主因は分岐にあるため、図 5.25 のように声道の主管部分と分岐部で領域分割を行うことにより、各々のメッシュ生成が容易になることが予想できる。

ただし、分岐部分を切断した場合に各々の滑らかな接続には、新たなアルゴリズムを開発する必要があるため、本論文では扱わない。

本論文では単純に図 5.26 に示すような声道形状を中心付近で二分分割して DDM を適用した音響シミュレーションを行った。分割後のメッシュを図 5.27、図 5.28 に示す。分割前の要素数は 41,154 要素、ノード数は 46,000 ノード、基底関数の次数は 1 次とした。また、分割後の要素数は放射球側と声門側それぞれ 23,826 要素、19,494 要素、ノード数は 26,800 ノード、22,000 ノードである。また基底関数の次数は共に一次とした。

境界条件としては放射球の平面部分は剛壁、球面部分には空気の音響インピーダンスを与えた。また、声道の壁面には神山らの実測値を近似したもの [b5, b6] を用いた。

図 5.29 に分割前のメッシュに対して FEM を用いて得られた体積速度伝達関数および領域分割後のメッシュに対して提案方法を用いて得られた体積速度伝達関数を示す。双方の体積速度伝達関数がよく一致していることがわかる。このことから、3 次元形状においても DDM が有用であることが分かった。ただし、FEM においては 8kHz に計算の破綻が見られる。これは領域分割を行わずに FEM を使用した場合と比較して、領域分割を行った場合では行列の条件数が改善される事によると考えられる。

図 5.30 に FEM と提案方法におけるソルバの計算時間を示す。FEM と比較して提案方法は、大半の周波数において計算時間が増加している。ただし、メッシュ生成の時間を短

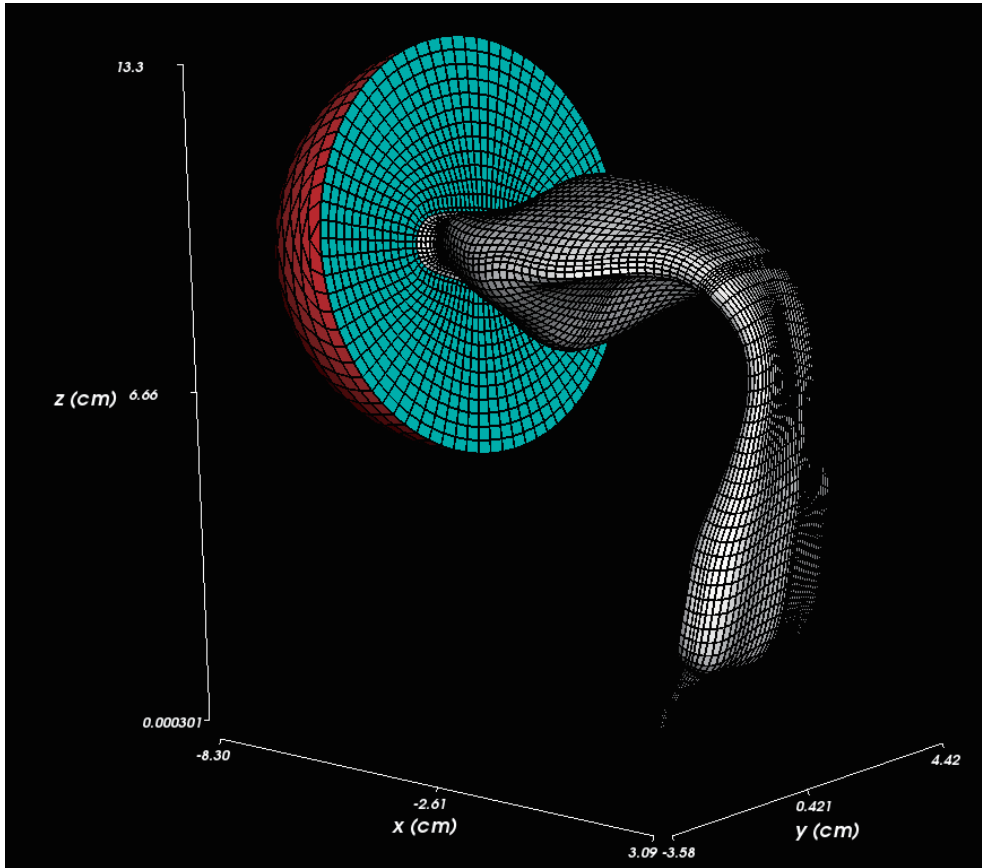


図 5.26 分割前のメッシュ。要素数は 41,154 要素，ノード数は 46,000 ノードである。

縮できることを鑑みると（現状では手作業によるメッシュの調整が必要であるため，3ヶ月を要すると言われている），この程度の計算時間の増加は吸収できると考えられる。

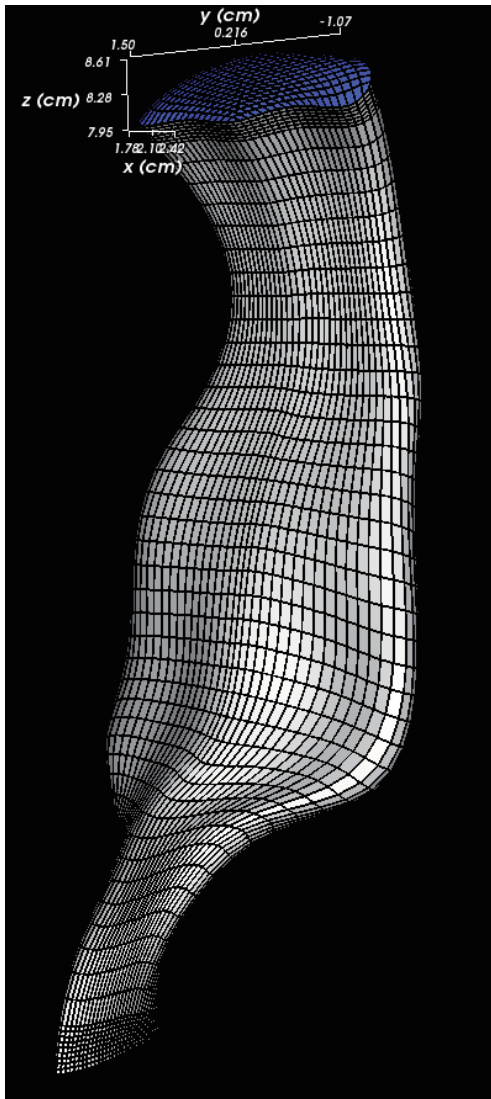


図 5.27 分割後の声門側のメッシュ. 要素数は 19,494 要素, ノード数は 22,000 ノードである.

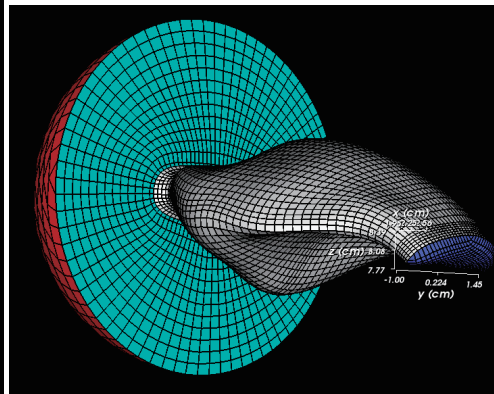


図 5.28 分割後の放射球側のメッシュ. 要素数は 19,494 要素, ノード数は 23,826 ノードである.

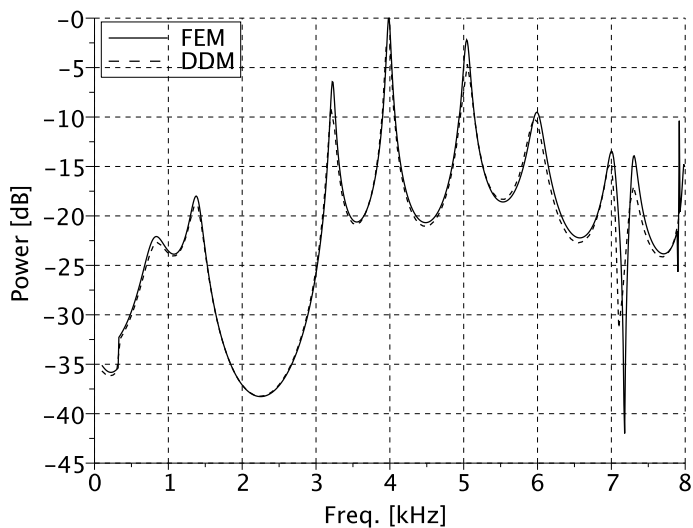


図 5.29 有限要素法 (FEM) と提案方法 (DDM) の体積速度伝達関数における比較 (日本語男性母音/a/). 実線が FEM を用いて得られた体積速度関数, 破線が提案方法を用いて得られた体積速度関数. 非常に良く一致していることが分かる. ただし, 8kHz 付近で FEM には計算の破綻がみられるが, 提案方法では破綻が生じていない.

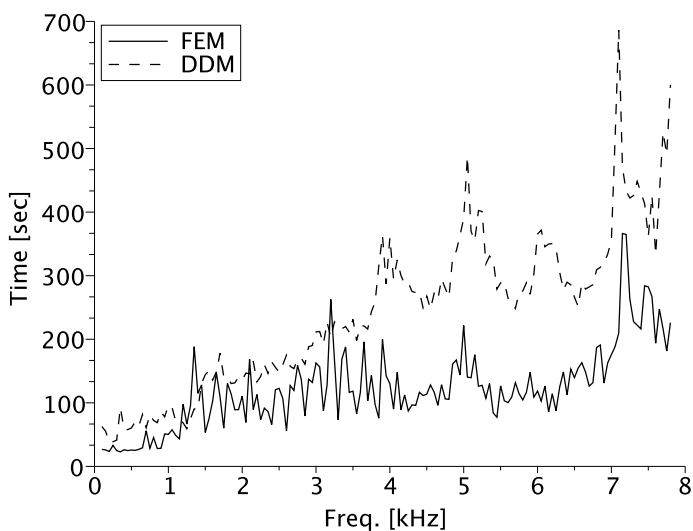


図 5.30 有限要素法 (FEM) と提案方法 (DDM) の計算時間における比較 (日本語男性母音/a/). 実線が FEM を用いた場合の計算時間, 破線が提案方法を用いた場合の計算時間.

5.4 まとめ

第4章にて述べた声道アナログ・モデルでは声道の3次元形状から生じる特徴量を実現できないことを述べた。さらに、3次元形状内を伝搬する音波を表現するために波動方程式と呼ばれる偏微分方程式を導入し、波動方程式を数値的に解くための方法において従来の問題点とそれを解決するための提案方法の概略を述べた。

また FEM の定式化の中に含まれる積分を計算機上で行うためにメッシュを生成する必要がある、そのメッシュ生成におけるコストが問題となることを示した。

数値解法として Chebychev Collocation Method と DDM の組み合わせを用いて、単純な形状において DDM が十分な精度で波動方程式を数値的に解くことが出来ることを示した。

さらに、提案方法1として Spectral Element Method と DDM の組み合わせと、それを実現するためのメッシュ生成アルゴリズムを示した。Chebychev Collocation Method と比較して条件数の悪化を押さえることが出来る Spectral Element Method を導入した。さらに、声道表面の形状を滑らかに近似するために Bézier 曲線よりも自由度の高い Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) 曲面を導入し、提案するメッシュ生成のアルゴリズムを示した。Spectral Element Method と DDM の組み合わせを用いて簡単な形状について波動方程式を解き、その問題点を示した。

提案方法1によるメッシュ生成に関するコストは飛躍的に減少した。一方で提案方法では表面を滑らかに近似したメッシュと内部を大まかに近似したメッシュ間で DDM を用いて数値解を統合していたが、内部メッシュの人工境界において生じる形状の不連続点において数値誤差が大きく、DDM による数値解の統合が破綻する場合が見受けられた。機械的に破綻を検出することが可能で、人工境界の境界条件の任意定数 α を変更して計算を再試行することで一応の収束は得られることが分かった。

次に提案方法2として、3次元声道形状を軸方向にみて中央付近で領域分割した場合における Spectral Element Method と DDM の組み合わせを試行した。その結果 100-7500Hz の帯域で良好な解析結果が得られた。このことから、DDM における人工境界の形状上の不連続点が無い場合では数値解が安定することが分かった。この結果は3次元音響問題においては本論文で初めて得られた。これらの結果から、声道形状を複雑としている主因である分岐部分にて領域分割を行うことで、各々のメッシュ生成が容易にできる可能性があることを示した。

第6章

考察と結論

本論文では、声道の音響モデルを高精度化することを目的として、まず第4章にて、声道アナログ・モデルにおいて電気回路モデルをデジタルフィルタモデルで実現する際に、各素子の周波数依存特性の近似精度を大幅に向上させる方法を提案した。さらに提案方法を用いて合成した音声を検証した。その結果、声門下インピーダンスの考慮の有無に関わらず、提案方法では従来方法と比較して体積速度波形に重畳するリップル成分が減少し、ピッチ周期が増加することが示された。この声門流に重畳する振動成分における聴覚上での有意性について、Båvegårdらは重畳する振動成分の有無と合成された音声に関して、被験者は重畳する振動成分が含まれる合成音声を好む傾向があり、さらに、定常な母音を刺激として与えた場合と比較して非定常なセンテンスを刺激として与えた際に重畳する振動成分の有無による差異をより明確に知覚することを示している [a1]。したがって、周波数依存特性を近似することは非常に有意義であると言えるし、またその方法を提案することで音声生成分野に貢献することが出来たと考えられる。

さらに第5章にて、3次元声道形状におけるFEMによる音響解析において、メッシュ生成の人的コストを低減する方法について論じた。提案方法はDDMに寄る方法であるが、その分割のアプローチから2つの提案方法を述べた。まず提案法1として、表面を滑らかに近似したメッシュと内部を大まかに近似したメッシュをそれぞれ独立して生成し、DDMを用いて数値解を統合する方法について述べた。しかしながら内部メッシュの人工境界において生じる形状上の不連続点において数値誤差が大きく、DDMによる数値解の統合が破綻する場合が見受けられた。次に提案方法2として、形状上の不連続点が生じることの無いよう、声道形状における分岐部分にて分割する方法を提案した。その予備実験として、声道を軸方向に2分割して数値実験を行った。その結果として軸方向での領域分割の場合では数値解が安定に求まることが分かった。これは生成したメッシュの人工境界が滑らかに表現されていることによると考えられる。これらの結果から、人工境界が滑らかであれば3次元形状における音響解析においても数値解が安定に求まることが示された。しかしながら、提案した方法はメッシュ生成のコストは削減できるものの、ソルバの計算コストは増大している。また、領域の分割数も2つである等、依然として不十分な部分もみられる。さらには、声道の主管部分と分岐部をDDMにより統合した場合に生じる

問題について考察できていない。以上のようなことから、今後の課題として以下のことが上げられる。

1. ソルバの計算コストを低減させるために、何らかの対策を講じる必要がある。例えば、領域の分割数を2つより細分化することで、一領域あたりの行列サイズを小さくし、高速化できる可能性がある。
2. 今までに得られた知見から、DDMにおける人工境界が滑らかに表現されているならば数値解は安定に求まる傾向が見られるが、声道の主管部分と分岐部をDDMにより統合した場合でも、数値解が安定に求まるかを調べる必要がある。

以上のような課題を残してはいるものの、DDMによる3次元音響解析が有効であるとの報告は本研究が初めてである。したがって、本研究の成果が今後の3次元声道形状における音響解析に大きく貢献できたと考えられる。

6.1 今後の展望

近年の計算機の性能の向上は目覚ましく、いずれ声道形状全体において3次元音響シミュレーションを利用した音声合成器が誕生するかもしれない。そうなれば、より品質の高い音声を自由に合成できる可能性がある。しかし、一方で声道内の音波の伝搬において平面波が伝搬すると仮定できる部分があることは明らかである。そこで、本研究で採用したDDMによって、平面波が伝搬すると仮定できる部分では一次元モデルを採用し、それ以外では3次元音響シミュレーションを採用するようなシステムを構築できれば、低コストで高品質な音声合成器の実現が可能となろう。本研究にて得られた知見がそのような音声合成器を構築するにあたっての基礎として利用されることを望んでやまない。

第7章

各章の要約

第4章の要約

1. 声道アナログ・モデルにおいて、従来のデジタルフィルタモデルの実現方法を述べた。
2. 従来のデジタルフィルタモデルの問題点について述べた。
3. デジタルフィルタモデルの実現を高精度に行う方法を提案し、その方法を詳述した。
4. 提案したデジタルフィルタモデルを用いて音声を合成し、従来のデジタルフィルタモデルを用いて合成した結果と波形および周波数スペクトルの観点から比較した。
5. 声門下インピーダンスの考慮の有無に関わらず、周波数依存特性を高精度に近似したモデルでは従来のモデルと比較してリップル成分が減少し、ピッチ周期が増加することがわかった。

第5章の要約

1. 声道アナログ・モデルでは声道の3次元形状から生じる特徴量を実現できないことを述べた。
2. 3次元形状内を伝搬する音波を表現するために波動方程式と呼ばれる偏微分方程式を導入した。
3. FEMの定式化の中に含まれる積分を計算機上で行うためにメッシュを生成する必要があることを示した。
4. メッシュ生成において、数値シミュレーションにおける精度を確保するためにメッシュの手作業による調整が問題となることを述べた。
5. 提案方法としてDDMを採用することを述べ、その予備実験としてChebychev Collocation MethodとDDMの組み合わせを試行した。
6. DDMではメッシュの空間的な重複が許容されるため、メッシュ生成の拘束条件が緩和されることを述べた。

7. Spectral Element Method と DDM の組み合わせを用いて簡単な形状について音響シミュレーションを行った。
8. 提案した方法では、表面を滑らかに近似したメッシュと内部を大まかに近似したメッシュ間で DDM を用いて数値解を統合していたが、内部メッシュの人工境界において生じる形状上の不連続点において数値誤差が大きく、DDM による数値解の統合が破綻する場合が見受けられた。
9. 表面と内部の領域分割では問題が生じたため、声道の軸方向での分割を行い音響シミュレーションを行った。
10. 軸方向での領域分割の場合では数値解が安定に求まることが分かった。これは生成したメッシュの人工境界が滑らかに表現されていることによると考えられる。
11. 領域分割を行わなかった場合では 7kHz 以上で安定化双共役勾配法の破綻が見られたが、領域分割を行った場合では破綻は見られなかった。これは領域分割を行わずに FEM を使用した場合と比較して、領域分割を行った場合では行列の条件数が改善される事によると考えられる。

参考文献

[a] 音声関係一般

- [a1] M. Båvegård and G. Fant, “Notes on glottal source interaction ripple,” *STL-QPSR*, **35**(4), pp. 63–78 (1994).
- [a2] Gunnar Fant, *Acoustics theory of speech production* (Mouton, Paris, 1970), pp. 15–36.
- [a3] G. Fant, K. Ishizaka, J. Lindqvist-Gauffin and J. Sundberg, “Subglottal formants,” *STL-QPSR*, **13**(1), pp. 1–12 (1972).
- [a4] G. Fant and Q. Lin, “Glottal source - vocal tract acoustic interaction,” *STL-QPSR*, **28**(1), pp. 13–27 (1987).
- [a5] J. J. Fredberg and A. Hoenig, “Mechanical response of the lungs at high frequencies,” *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **100**, pp. 57–66 (1978).
- [a6] H. Hudde and H. Slatky, “The acoustical input impedance of excised human lungs- Measurements and model matching,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **86**, pp. 475–492 (1989).
- [a7] 古井貞熙, デジタル信号処理, (東海大学出版会, Tokyo, 1985), 第7章.
- [a8] 古井貞熙, 音声情報処理, (森北出版株式会社, Tokyo, 1998), 第4章.
- [a9] 古井貞熙, 新音響・音声工学, (近代科学社, Tokyo, 2006), 第13章.
- [a10] 北脇信彦, 音のコミュニケーション工学, (コロナ社, Tokyo, 1996), 第3章.
- [a11] Kazuo Nakata, *Speech (new edition)*, (Corona Publishing Co., Tokyo, 1998), Chap. 3, Chap. 5.
- [a12] L. R. Rabiner and R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1978).
- [a13] Kenneth N. Stevens, *Acoustic phonetics* (The MIT press, London, 2000).

[b] 音声合成関係

- [b1] H. K. Dunn, “The Calculation of Vowel Resonances, and an Electrical Vocal Tract,” *J. Acoust. Soc. Am.*, **22**, pp. 740–753 (1950).

- [b2] Gunnar Fant, "Network theory of vocal transmission," in *Acoustic Theory of Speech Production 2nd Ed.* (Mouton & Co., Netherlands, 1970), Chap. 1, pp. 27–47.
- [b3] J. L. Flanagan, "Equivalent circuit for lossy cylindrical pipe," in *Speech Analysis Synthesis and Perception 2nd ed.* (Springer-Verlag, New York, 1972), Section 2.3, pp. 25–35.
- [b4] K. Ishizaka and J. L. J. Flanagan, "Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords," *Bell Syst. Tech. J.*, **51**, pp. 1233–1268 (1972).
- [b5] N. Kamiyama, N. Miki, and N. Nagai, "Measurement of acoustic reflection characteristics of the human cheek," *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **11**(4), pp. 207–214 (1990).
- [b6] N. Kamiyama, N. Miki, and N. Nagai, "Study of the Vocal Tract Wall Impedance Using Viscoelastic Model of the Wall," *IEICE Trans. Fundamentals*, **J75-A**, pp. 1649–1659 (1992).
- [b7] Nobuhiro Miki, "Application of ARMA digital lattice filter to speech analysis and reconstruction," in *Linear Circuits, Systems and Signal Processing*, Nobuo Nagai, Eds. (Marcel Dekker, New York and Basel, 1990), Chap. 13, pp. 389–414.
- [b8] Nobuhiro Miki, "Note on Response of Lossy Transmission Line Model," *Tech. Rep. IEICE*, CAS2001-19, pp. 139–144 (2001).
- [b9] N. Miki and K. Hayashi, "Realization of subglottal system using ARMA filter," *Acoust. Sci. & Tech.*, **28**, pp. 431–433 (2007).
- [b10] 元木邦俊, "高次モードを考慮した声道音響モデルの構成法," *日本音響学会誌*, **54**(12), pp. 850–856 (1998).
- [b11] T. Nomura, N. Miki and N. Nagai, "A digital vocal tract simulator with the boundary conditions at lips and glottis," *IEICE Trans. Fundamentals*, **J64-A**, pp. 251–258 (1981).
- [b12] J. Suzuki, "Discussion on vocal tract wall impedance," *J. Acoust. Soc. Jpn. (J)*, **34**, pp. 149–156 (1978).
- [b13] R. Wilhelms-Tricarico and R. S. McGowan, "Rational approximations of viscous losses in vocal tract acoustic modeling," *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**, pp. 3195–3201 (2004).
- [b14] E. Yoshikawa and N. Miki, "Evaluation method of simultaneous spectrum in time-varying vocal tract analog model," *Tech. Rep. IEICE*, CAS2001-4, pp. 25–32 (2001).

[c] **数値解析一般**

- [c1] M. G. Blyth and C. Pozrikidis, "A Lobatto interpolation grid over the triangle,"

- IMA J. Appl. Math.*, **71**(1), pp. 153–169 (2006).
- [c2] A. Bueno-Orovio, V. M. Perez-Garcia, and F. H. Fenton, “Spectral Methods for Partial Differential Equations in Irregular Domains: The Spectral Smoothed Boundary Method,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, **28**(3), pp. 886–900 (2006).
- [c3] Somchart Chantasiriwan, “Cartesian grid methods using radial basis functions for solving Poisson, Helmholtz, and diffusion-convection equations,” *Engineering analysis with boundary elements*, **28**(12), pp. 1417–1425 (2004).
- [c4] M. O. Deville, P. F. Fischer and E. H. Mund , *High-order methods for incompressible fluid flow* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002),.
- [c5] Bengt Fornberg, *A practical guide to pseudospectral method* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [c6] M. J. Gander, F. Magoulès, and F. Nataf, “Optimized Schwartz Methods without overlap for the Helmholtz equation,” *SIAM J. Sci. Comput.*, **24**(1), pp. 38–60 (2002).
- [c7] G. E. Karniadakis and S. J. Sherwin, *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics* (Oxford University Press, 2005).
- [c8] E. Larsson and B. Fornberg, “A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs,” *Computers & Mathematics with Applications*, **46**(5-6), pp. 891–902 (2003).
- [c9] H. Lin and S. N. Atluri, “The Meshless Local Petrov-Galerkin (HLin) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equations,” *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **2**(2), pp. 117–142 (2001).
- [c10] G. R. Liu, G. Y. Zhang, Y. T. Gu, and Y. Y. Wang, “A meshfree radial point interpolation method (GRLiu) for three-dimensional solids ,” *Computational Mechanics*, **36**(6), pp. 421–430 (2005).
- [c11] Y. Ohtake and A. Belyaev, “Dual/Primal Mesh Optimization for Polygonized Implicit Surfaces,” *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, **2**(4), pp. 171–178 (2002).
- [c12] Y. Ohtake, A. Belyaev, M. Alexa, G. Turk and H. P. Seidel, “Multi-level partition of Unity Implicits,” *International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, **173**, pp. 173–180 (2005).
- [c13] R. Pasquetti and F. Rapetti, “Spectral element methods on triangles and quadrilaterals: comparisons and applications,” *J. Comp. Phy.*, **198**, pp. 349–362 (2004).
- [c14] J. F. Thompson, B. K. Soni and N. P. Weatherill, *Handbook of grid generation* (CRC press, 1998), pp. 3-1–3-15.

[d] 数値解析 (音声・音響) 関係

- [d1] 新川拓也, 安藤貴則, 松村雅史, 川野恵理, “3次元声道内の音圧分布に基づく声道長の推定,” *バイオメカニズム*, **16**, pp. 301–308(2002).
- [d2] M. A. Casarin and O. B. Widlund, “Overlapping Schwarz Methods for Helmholtz’s Equation,” *International Conference on Domain Decomposition Methods*, in Greenwich, England, 178–189 (July 1998).
- [d3] 井上謙次, 竹本浩典, 北村達也, 正木信夫, “デジタルウェーブガイドメッシュを用いた3次元MRIデータからの声道断面積関数の抽出,” 日本音響学会春期研究発表会講演論文集, pp. 319–322 (2008).
- [d4] T. Kitamura, H. Takemoto, and K. Honda, “Acoustic analysis of the vocal tract by FEM with voxel meshing,” *Tech. Rep. IEICE*, SP2004-11, pp. 41–46 (2004).
- [d5] C. Lu, T. Nakai, and H. Suzuki, “Finite element simulation of transmission in vocal tract,” *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **14**(2), pp. 63–72 (1993).
- [d6] H. Matsuzaki, N. Miki, and Y. Ogawa, “A Study on Elliptic Sound Tube Model of Vocal Tract with Volume of Radiation using 3-D FEM,” *Tech. Rep. IEICE*, SP95-113, pp. 33–38 (1995).
- [d7] H. Matsuzaki and K. Motoki, “FEM Analysis of Three-Dimensional Acoustic Characteristics in Sound Tube,” *IEICE Trans. Fundamentals*, **J80-A**, pp. 1351–1359 (1997).
- [d8] H. Matsuzaki, N. Miki, and Y. Ogawa, “3-D Finite Element Analysis of Japanese Vowels in Elliptic Sound Tube Model,” *IEICE Trans. Fundamentals*, **J81-A**, pp. 899–906 (1998).
- [d9] H. Matsuzaki, K. Motoki, and N. Miki, “Simulation of vowel production by FEM in time domain,” *Tech. Rep. IEICE*, SP2002-59, pp. 11–16 (2002).
- [d10] 松崎博季, 元木邦俊, 三木信弘, “有限要素法における3次元声道モデルの曲がり及び断面形状の簡略化に関する検討,” 日本音響学会誌, **59**(8), pp. 440–449 (2003).
- [d11] H. Matsuzaki, K. Motoki, and N. Miki, “A study of influences of the protrusion of the lips and the branches of the vocal tract by three-dimensional finite element method,” *Tech. Rep. IEICE*, SP2003-71, pp. 43–48 (2003).
- [d12] H. Matsuzaki and K. Motoki, “Acoustic analysis of the vocal tract with the nasal cavity during phonation of vowel by 3-D FEM,” *Tech. Rep. IEICE*, SP2005-47, pp. 7–12 (2005).
- [d13] H. Matsuzaki and K. Motoki, “A study of influences of the branches of the vocal tract by three-dimensional finite element method,” *Tech. Rep. IEICE*, SP2006-45, pp. 19–24 (2006).
- [d14] H. Matsuzaki and K. Motoki, “Study of acoustic characteristics of vocal tract with nasal cavity during phonation of Japanese /a/,” *Acoust. Sci. & Tech.*, **28**(2), pp. 124–127 (2007).

- [d15] 元木邦俊, 松崎博季, “3次元声道モデルにおける伝達特性の評価方法について,” 日本音響学会秋期研究発表会講演論文集, pp. 439–440 (2007).
- [d16] J. Mullen, D. M. Howard, and D. T. Murphy, “Real-Time Dynamic Articulations in the 2-D Waveguide Mesh Vocal Tract Model,” *IEEE Trans. on Audio, Speech and Language Processing*, **15**(2), pp. 577–585 (2007).
- [d17] 西本博則, 赤木正人, 北村達也, 鈴木則子, “有限要素法による声道伝達特性推定の有効性に関する検討,” 日本音響学会誌, **62**(4), pp. 306–315 (2006).
- [d18] K. Sasaki, T. Hirohku, N. MIki, H. Matsuzaki, and N. Nagai, “Analysis of Acoustic Characteristic in the Vocal Tract with Inhomogeneous Wall Impedance Using Three Dimensional FEM Model,” *IEICE Trans. Fundamentals*, **J77-A**, pp. 325–333 (1994).
- [d19] K. Sasaki, N. MIki, H. Matsuzaki, and K. Miyana, “High-Speed Finite Element Computation in 3-D Acoustical Analysis of Vocal Tract,” *IEICE Trans. Fundamentals*, **J85-A**, pp. 1211–1218 (2002).
- [d20] T. Shiina, S. Kontani, and S. Itahashi, “Continus Speech Synthesis Based on 3-Dimensional Vocal Tract Model,” *Tech. Rep. IEICE*, SP97-2, pp. 7–12 (1997).
- [d21] 堤一男, 加川幸雄, “声道の音響管モデル近似に関する二, 三の考察 その1 X線正中断面からの3次元声道モデルの形成,” 日本音響学会誌, **54**(2), pp. 94–100 (1998).
- [d22] 堤一男, 加川幸雄, “声道の音響管モデル近似に関する二, 三の考察 その2 有限要素モデルとの比較,” 日本音響学会誌, **54**(2), pp. 101–110 (1998).
- [d23] 山崎憲, 瀬谷浩一郎, “段付き管内音圧分布の数値計算と実験,” 日本音響学会誌, **39**(10), pp. 668–674 (1983).
- [d24] 山崎憲, 瀬谷浩一郎, “閉止段付き管内音圧分布の有限要素解析と実験,” 日本音響学会誌, **45**(1), pp. 3–8 (1989).
- [d25] 山崎憲, 瀬谷浩一郎, “開放型段付き管内音圧分布の有限要素解析と実験,” 日本音響学会誌, **46**(9), pp. 711–715 (1990).

[e] その他

- [e1] A. Feuer and G. C. Goodwin, *Sampling in Digital Signal Processing and Control* (Birkhäuser, Boston, 1996), pp. 109–163.
- [e2] K. Hatori, *Basic Theory of Electric Circuit (1)* (Corona Publishing Co., Tokyo, 1983).
- [e3] K. Hatori, *Basic Theory of Electric Circuit (2)* (Corona Publishing Co., Tokyo, 1985), pp. 124–160.
- [e4] 川村雅恭, 電気音響工学概論, (昭晃堂, Tokyo, 1971), pp. 4–10.
- [e5] 長尾智晴, 最適化アルゴリズム, (昭晃堂, Tokyo, 2000), 第5章.
- [e6] M. D. Sidman, F. E. DeAngelis and G. C. Verghese, “Parametric system identi-

fication on logarithmic frequency response data," *IEEE Trans. Automatic Control*, **36**, pp. 1065–1070 (1991).

謝辞

本研究は、筆者が公立ほこだて未来大学システム情報科学部および同大学大学院システム情報科学研究科在学中に2005年より約6年間に行ったものである。



本研究の遂行並びに学会活動など、終始、御指導、御鞭撻をいただいた上、私事、私生活におきましてもご指導をいただいた公立ほこだて未来大学大学院システム情報科学研究科、三木信弘教授に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり、有益な御助言、御協力をいただいた北海学園大学工学部電子情報工学科、元木邦俊教授に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり、有益な御助言、御協力をいただいた北海道工業大学創生工学部情報フロンティア工学科、松崎博季准教授に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり有益な御助言、御協力をいただき、留学中の私事、私生活におきましてもご指導をいただいた仏国立・グルノーブル理工科大学・大学院 GISPA-Lab Pierre Badin 博士に深く感謝いたします。

本論文をまとめるにあたり、御指導、御助言を頂いた公立ほこだて未来大学大学院システム情報科学研究科、上野嘉夫教授に深く感謝致します。

本論文をまとめるにあたり、御指導、御助言を頂いた公立ほこだて未来大学大学院システム情報科学研究科、高橋修教授に深く感謝致します。

本論文をまとめるにあたり、御指導、御助言を頂いた公立ほこだて未来大学大学院システム情報科学研究科、藤野雄一教授に深く感謝致します。

本論文をまとめるにあたり、御指導、御助言を頂いた九州大学大学院芸術工学研究院、鏑木時彦准教授に深く感謝致します。

本研究の遂行にあたり、様々な御助言、御協力をいただいた公立ほこだて未来大学大学院システム情報科学研究科の大学院生諸氏の皆さんに深く感謝致します。

最後に本研究の遂行にあたり、著者を常に支援し応援してくれた両親、並びに親族のみなさまに心より感謝申し上げます。

研究業績一覧

電子情報通信学会誌

1. 林恭平, 三木信弘, “領域分割法を用いた 3 次元声道音響解析に関する一考察,” 電子情報通信学会, 領域 A, 査読中.

日本音響学会誌

1. N. Miki and K. Hayashi, “Realization of subglottal system using ARMA filter,” *Acoust. Sci. & Tech.*, 28, pp.431–433, 2007.
2. K. Hayashi and N. Miki, “Approximation method for time-domain simulation in the lossy vocal tract and evaluation of frequency dependent losses for glottal source flow,” *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, 29, pp.130-138, 2008.

国際会議 (査読あり)

1. N. Miki and K. Hayashi, “Approximation method of subglottal system using ARMA filter,” Interspeech2007, Wed.P2-2, pp.1370-1373, Antwerp, Belgium, (2007.8).
2. K. Hayashi and N. Miki, “Auto-Meshing Algorithm for Acoustic Analysis of Vocal Tract,” Interspeech2009, Tue.P1-2, pp.760-763, Brighton, United Kingdom, (2009.9).

音声研究会 (査読なし)

1. 林恭平, 三木信弘, “周波数依存伝搬定数を含む高精度近似による声道のフィルタモデル,” 信学技報, SP2006-6, pp.1-6, Jun. 2006.
2. 林恭平, 三木信弘, “声道内損失の特性近似と肺モデルを用いたフィルタ,” 信学技報, SP2006-44, pp.13-17, Aug. 2006.
3. 林恭平, 三木信弘, “3次元声道音響解析のための自動メッシュ生成アルゴリズム,”

信学技報, SP2009-23, pp.1-6, Jun. 2009.

電気・情報関係学会北海道支部連合大会（査読なし）

1. 林恭平, 三木信弘, “声道内損失の特性近似と肺モデルを用いたフィルタ,” Nov. 2006.

目次

2.1	音声生成器官の断面図.	11
2.2	単純化された音声生成器官.	11
2.3	声道の音響管形状の例.	11
2.4	均一音響管の縦続接続による近似.	11
2.5	分布定数線路の微小区間の回路素子.	12
3.1	領域 Ω とその境界 Γ	19
3.2	1次元の要素分割例.	22
3.3	0-3 次の Chebyshev 関数.	26
3.4	Chebyshev Collocation Method の例題として用意した形状. \bigcirc は Chebyshev-Gauss-Lobatto の積分点 $\xi_{s(m_1, m_2)}$ を示す.	27
3.5	変形要素 1.	29
3.6	変形要素 1 : 2kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.7	変形要素 1 : 4kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.8	変形要素 1 : 6kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.9	変形要素 1 : 8kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.10	変形要素 1 : 10kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.11	変形要素 1 : 12kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	30
3.12	変形要素 1 : Chebyshev Collocation Method と FEM による体積速度伝 達関数の比較.	31
3.13	変形要素 2.	31
3.14	変形要素 2 : 2kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.15	変形要素 2 : 4kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.16	変形要素 2 : 6kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.17	変形要素 2 : 8kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.18	変形要素 2 : 10kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.19	変形要素 2 : 12kHz における速度ポテンシャルの絶対値.	32
3.20	変形要素 2 : Chebyshev Collocation Method と FEM による体積速度伝 達関数の比較.	33

3.21	10 次基底関数 $\pi_j(\xi)(j = 0, 1, \dots, 5)$	34
3.22	プリズム要素の概形.	35
3.23	10 次における Lobatto grid over the triangle のノード配置.	37
3.24	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,0)}([\xi_1, \xi_2])$	38
3.25	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,1)}([\xi_1, \xi_2])$	38
3.26	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,2)}([\xi_1, \xi_2])$	38
3.27	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,3)}([\xi_1, \xi_2])$	38
3.28	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(0,4)}([\xi_1, \xi_2])$	39
3.29	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,0)}([\xi_1, \xi_2])$	39
3.30	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,1)}([\xi_1, \xi_2])$	39
3.31	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,2)}([\xi_1, \xi_2])$	39
3.32	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(1,3)}([\xi_1, \xi_2])$	40
3.33	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,0)}([\xi_1, \xi_2])$	40
3.34	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,1)}([\xi_1, \xi_2])$	40
3.35	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(2,2)}([\xi_1, \xi_2])$	40
3.36	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(3,0)}([\xi_1, \xi_2])$	41
3.37	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(3,1)}([\xi_1, \xi_2])$	41
3.38	三角要素における Legendre 多項式 $L_{q(4,0)}([\xi_1, \xi_2])$	41
3.39	DDM の概略.	42
3.40	領域分割の例.	43
3.41	正規化座標系から実座標系への写像.	44
3.42	Bézier 曲線.	44
3.43	Bézier 曲線を 4 辺にもつ曲面の例.	45
3.44	Bézier 曲線を 4 辺にもつ曲面からなる 6 面体.	46
3.45	NURBS Surface $\mathbf{S}(\xi)$	47
3.46	NURBS 曲面を用いた変形要素.	49
4.1	隣接した区間における分布定数線路.	65
4.2	声道 1 区間のデジタルフィルタモデル. 以降, デジタルフィルタモデル C-1 と呼ぶ.	67
4.3	$e^{-\gamma}$ の周波数特性. 上段: 振幅特性. 下段: 位相特性.	67
4.4	μ の周波数特性. 上段: 振幅特性. 下段: 位相特性.	68
4.5	声道 1 区間のデジタルフィルタモデル.	68
4.6	Y_W の振幅特性. 実線が平滑化後, 破線が平滑化前.	69
4.7	Y_W の位相特性. 実線が平滑化後, 破線が平滑化前.	69
4.8	最急降下法における探索.	70
4.9	σ の変化に対する振幅特性の変化.	73
4.10	1 組の極と零点の対の振幅特性.	73

4.11	1組の極と零点の対の位相特性.	73
4.12	3組の極と零点の対の振幅特性.	74
4.13	3組の極と零点の対の位相特性.	74
4.14	最も近似誤差が大きかった伝搬定数の近似結果. つぶれ指標 $Sr = 0.1$, 声道断面積 $A = 0.5[\text{cm}^2]$	77
4.15	最も近似誤差が小さかった伝搬定数の近似結果. つぶれ指標 $Sr = 1.0$, 声道断面積 $A = 14.9[\text{cm}^2]$	77
4.16	係数 σ_{11} の近似結果 (断面積 A とつぶれ度 Sr の関数実現).	77
4.17	伝搬特性の近似誤差.	77
4.18	FIR フィルタの係数の生成フロー.	79
4.19	最終的に提案する声道一区間のデジタルフィルタモデル.	80
4.20	日本語男性母音 /u/, /i/, /a/ に対する体積速度伝達関数.	83
4.21	日本語男性母音 /u/, /i/, /a/ に対する駆動点インピーダンス.	84
4.22	声門下の Branching network model.	85
4.23	肺の終端における回路モデル.	86
4.24	肺の回路終端.	86
4.25	階層 k における分岐モデル.	86
4.26	声門下の駆動点インピーダンス $Z_{Lg}(\omega)$ の周波数特性.	87
4.27	声門下の回路モデル [b14].	88
4.28	$1/(Z'_{Lg}(\omega) + R_t)$ に対する近似結果 $\mathcal{T}(s, \mathbf{P})$	88
4.29	声門下のデジタルフィルタモデル (声門下インピーダンスあり).	90
4.30	声門下のデジタルフィルタモデル (声門下インピーダンスなし).	90
4.31	音声合成時の各ブロックの接続図 (声門下インピーダンスあり).	91
4.32	音声合成時の各ブロックの接続図 (声門下インピーダンスなし).	91
4.33	日本語男性母音 /u/, /a/ に対する合成波形. (P: 提案方法-声門下イン ピーダンス無し. C: 従来法-声門下インピーダンス無し. PL: 提案方法- 声門下インピーダンス有り. CL: 従来法-声門下インピーダンス有り)	92
4.34	日本語男性母音 /u/, /a/ に対する声門流のスペクトル. (P: 提案方法-声 門下インピーダンス無し. C: 従来法-声門下インピーダンス無し. PL: 提案方法-声門下インピーダンス有り. CL: 従来法-声門下インピーダン ス有り. 水平棒は $F_1 \pm 200$ Hz の範囲を示す)	93
5.1	波動方程式の導出.	95
5.2	境界条件の例. Γ_{wall} , Γ_{in} , Γ_{rad} はそれぞれ壁面, 駆動面, 放射面を表す.	97
5.3	3次元形状の例題.	98
5.4	8 kHz における速度ポテンシャルの実部.	100
5.5	許容されない要素の例. (a):要素間に重複がある場合. (b):要素間に隙間 がある場合. (c):要素が極端に変形している場合.	100

5.6	提案方法の概念図.	101
5.7	Chebyshev Collocation Method と DDM の数値実験のためのモデル. . .	102
5.8	Chebyshev Collocation Method と DDM を用いて求めた体積速度伝達 関数と理論値.	103
5.9	表面の NURBS Mesh と内部の Cartesian Mesh.	104
5.10	NURBS Mesh の生成フロー.	104
5.11	Implicit Surface.	105
5.12	近似における小領域の生成過程.	106
5.13	Dual mesh.	109
5.14	Dual mesh を用いたメッシュ最適化のフロー.	110
5.15	各ベクトルの関係. (左) Q が外部にある場合. (右) Q が内部にある場 合.	110
5.16	Double Dual Mesh.	110
5.17	外部メッシュの補間点 Q^{Outer} の計算方法の概念図.	112
5.18	内部メッシュの補間点 Q^{Inner} の計算方法の概念図.	113
5.19	日本語男性母音/a/に対して生成したメッシュ. 赤色: Inner block, 緑 色: Outer surface. 水色: Outer surface と Inner surface を結ぶ線. Inner Surface は Inner block に埋没しているため, この図では見るこ とができない.	114
5.20	領域分割の概念図.	114
5.21	提案するソルバのフローチャートの外観.	117
5.22	試験用に生成したメッシュ.	118
5.23	Surface blocks を用いずに解析した体積速度分布 (3kHz) と狭窄部分を 拡大した体積速度分布. 直交格子のみの場合では各々のエッジ部分に誤 差が生じる.	118
5.24	Surface Mesh を用いて DDM によって解析した体積速度分布 (3kHz) と 狭窄部分を拡大した体積速度分布. 直交格子のみの解析に見られたエッ ジ部分の誤差が見られない.	119
5.25	声道の分岐部分での領域分割の概観.	120
5.26	分割前のメッシュ. 要素数は 41,154 要素, ノード数は 46,000 ノードで ある.	121
5.27	分割後の声門側のメッシュ. 要素数は 19,494 要素, ノード数は 22,000 ノードである.	122
5.28	分割後の放射球側のメッシュ. 要素数は 19,494 要素, ノード数は 23,826 ノードである.	122

5.29	有限要素法 (FEM) と提案方法 (DDM) の体積速度伝達関数における比較 (日本語男性母音/a/). 実線が FEM を用いて得られた体積速度関数, 破線が提案方法を用いて得られた体積速度関数. 非常に良く一致していることが分かる. ただし, 8kHz 付近で FEM には計算の破綻がみられるが, 提案方法では破綻が生じていない.	123
5.30	有限要素法 (FEM) と提案方法 (DDM) の計算時間における比較 (日本語男性母音/a/). 実線が FEM を用いた場合の計算時間, 破線が提案方法を用いた場合の計算時間.	123

表目次

1.1	各音声合成方式の特徴比較 [a9].	6
3.1	Chebyshev Collocation Method のプロパティ.	29
3.2	FEM のプロパティ.	29
3.3	数値積分の各評価点数における座標と重み 1/2.	62
3.4	数値積分の各評価点数における座標と重み 2/2.	63
4.1	近似計算のアルゴリズム 1/2.	75
4.2	近似計算のアルゴリズム 2/2.	76
4.3	肺の終端における各パラメータ.	86
4.4	式 (4.78) における近似パラメータ.	89
5.1	Adaptive Octree-based Approximation Algorithm.	107
5.2	dual mesh の頂点生成アルゴリズム.	111
5.3	DDM を用いたソルバのアルゴリズム.	115
5.4	試験用に生成したメッシュのプロパティ.	118