

Gauss核サンプリング公式の 複素関数論による誤差評価

田中 健一郎* 杉原 正顕* 室田 一雄*

* 東京大学大学院 情報理工学系研究科

Error Estimate of a Gaussian Kernel Sampling Formula via Complex Analysis

Ken'ichiro Tanaka* Masaaki Sugihara* Kazuo Murota*

* Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

Abstract

For a sampling formula with the sinc-Gaussian kernel Qian et al. have recently given an error estimate for the class of band-limited functions with the aid of tools from Fourier analysis. By using complex analysis, we give in this paper an error estimate for a wider class of functions. Part of the result of Qian et al. can be derived from ours as an immediate corollary. Computational results show a fairly good agreement with the theoretical convergence rates.

1. 導入

信号処理の分野における基本定理として, Shannon のサンプリング定理がある [5]. 帯域制限された関数の集合を

$$(1.1) \quad B_\sigma = \{f \in L^2(\mathbf{R}) \mid |\omega| > \sigma \Rightarrow \hat{f}(\omega) = 0\}$$

で定める. ここで $\sigma > 0$ であり, \hat{f} は f の Fourier 変換を表す. サンプリング定理は, $f \in B_\sigma$ ならば

$$(1.2) \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \operatorname{sinc}(x/h - k) \quad (x \in \mathbf{R})$$

となることを主張する. ただしここで $h = \pi/\sigma$ であり,

$$(1.3) \quad \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である. サンプリング公式(1.2) は, サンプル値 $f(kh)$ ($k \in \mathbf{Z}$) から関数 f が再構成できることを示している.

近年, このサンプリング公式を数値計算に使う研究が行われている. ただし, sinc 関数は減衰が遅いため, サンプリング公式における無限和を x の近傍の有限項で打ち切った単純な公式

$$(1.4) \quad f(x) \approx \sum_{k=\lfloor x/h \rfloor - N}^{\lfloor x/h \rfloor + N} f(kh) \operatorname{sinc}(x/h - k)$$

では, 一般には, 打ち切り誤差が大きく, 数値計算には使えない. そのため, つぎに述べるような2つの方法(工夫)が用いられる.

第一の方法は, 適当な変数変換 $x = \varphi(t)$ を施すことにより, $f(x)$ を急減衰する関数に変換するという方法である. 公式としては, サンプリング公式における無限和を有限項で打ち切った単純な公式

$$(1.5) \quad f(x) \approx \sum_{k=-N}^N f(\varphi(kh)) \operatorname{sinc}(t/h - k) \quad (t = \varphi^{-1}(x))$$

を用いる. このとき打ち切り誤差は $\sum_{|k| > N} |f(\varphi(kh))|$ で上から評価できるので, 変換後の $f(\varphi(t))$ が急減衰, たとえば, 指数関数的に減衰していれば, 打ち切り誤差はサンプル点数 $2N + 1$ に関して指数関数的に減衰することになる. なお, このような関数近似の方法に基礎をおく数値計算法として, Sinc 数値計算法と呼ばれる一連の手法が開発されている [6, 7, 8].

第二の方法は, サンプリングに用いる基底関数そのものを急減衰するものに変更するという方法である. そのようにして得られた公式として

$$(1.6) \quad f(x) \approx (\mathcal{T}_{N,h} f)(x) := \sum_{k=\lfloor x/h \rfloor - N}^{\lfloor x/h \rfloor + N} f(kh) \operatorname{sinc}(x/h - k) \exp \left[-\frac{(x - kh)^2}{2r^2 h^2} \right]$$

がある. ここで r は正の定数である. この公式(1.6)に対して, 標準的といえる呼び名は確立していないので, 本論文では Gauss 核サンプリング公式と呼ぶことにする. この公式は, Wei 等によって, 偏微分方程式の解の数値計算に用いられている [10, 11]¹. また, Qian 等は, $f \in B_\sigma$ の仮定のもとで, Gauss 核サンプリング公式に対して誤差 $\|f - \mathcal{T}_{N,h} f\|_\infty$ が N に関して指数関数的に減少することを示しており, さらに f の微分の近似についても同様の結果を示している [1, 2, 3, 4]. ここでは, 離散化誤差の評価の際に, 関数が帯域制限されているという条件を活かして, Fourier 変換と Parseval の等式に基づいた証明がなされている. 一方, わが国においても, 1975 年, 高橋秀俊が, サンプリング公式を数値計算へ応用することを考え, 上記の Gauss 核サンプリング公式を提案している. そして, さらに, f が解析関数の場合に, 複素関数論を用いて公式の誤差を論じている [9]. ただ, その議論は, 本質を突いているものの, 数学としては条件等が明確でない.

¹Wei 等は和の上限を $\lfloor x/h \rfloor + N$ としているが, ここでは対称性を持たせるために, $\lfloor x/h \rfloor + N$ としている. しかし後の議論に大きく影響するわけではない.

本論文では、Gauss核サンプリング公式の誤差に対する高橋の議論を数学的に厳密な形で展開する。具体的には、 $d > 0$ とするとき、複素平面上の帯状領域

$$(1.7) \quad \mathcal{D}_d := \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}z| \leq d\}$$

の上で正則かつ有界な関数 f に対して Gauss 核サンプリング公式の誤差を数学的に厳密な形で評価する。そして、さらに、 $f \in B_r$ なる関数に対する Qian 等の結果の一部がその特殊ケースとして導出されることを示す。

本論文の構成は以下のとおりである。まず2節で主結果を述べ、Qian-Ogawa [4] の結果との関係を説明する。次に3節で数値実験結果を提示する。4節には補題および定理の証明をまとめてある。

2. 公式の誤差評価と既存結果との関係

非負整数 m および正数 $r, h > 0$ に対し、関数 f の m 次導関数 $f^{(m)}$ の近似を与える作用素 $\mathcal{G}_h^{(m)}, \mathcal{T}_{N,h}^{(m)}$ を

$$(2.1) \quad (\mathcal{G}_h^{(m)} f)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{d^m}{dx^m} \left[\operatorname{sinc}(x/h - k) \exp \left[-\frac{(x - kh)^2}{2r^2 h^2} \right] \right],$$

$$(2.2) \quad (\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f)(x) := \sum_{k=\lfloor x/h \rfloor - N}^{\lfloor x/h \rfloor + N} f(kh) \frac{d^m}{dx^m} \left[\operatorname{sinc}(x/h - k) \exp \left[-\frac{(x - kh)^2}{2r^2 h^2} \right] \right]$$

と定義する ($m = 0$ の場合後者は(1.6)に一致する)。ここで sinc は(1.3)で定義されるものである。本論文では $\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f$ で与えられる公式を Gauss 核サンプリング公式と呼ぶ。

以下、 \mathcal{D}_d は式(1.7)で定義されるものとする。本節では、 \mathcal{D}_d 上正則で、定数 $A > 0$ に対し $|f(z)| \leq A$ ($\forall z \in \mathcal{D}_d$) を満たす関数 $f: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C}$ に対する Gauss 核サンプリング公式の誤差評価および、Qian-Ogawa [4] の結果との関係を述べる。以下、一般に \mathbf{R} 上の関数 g に対し、 $\|g\|_{\infty} := \sup_{-\infty < x < \infty} |g(x)|$ と定める。

2.1 誤差評価

本節の補題 2.1 および補題 2.2 の証明はいずれも 4 節にある。まず離散化誤差は次のように評価される。

補題 2.1 (離散化誤差の評価). $d > 0$ とする。 $f: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C}$ を、 \mathcal{D}_d 上正則で、定数 $A > 0$ に対し $|f(z)| \leq A$ ($\forall z \in \mathcal{D}_d$) を満たす関数とする。 m を非負整数、 r を正数とし、また h

を $h \leq \min\{2\pi d/\log 2, \pi\}$ を満たす正数とするとき,

$$\|f^{(m)} - \mathcal{G}_h^{(m)} f\|_\infty \leq \exp\left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2}\right) \cdot A \left[\frac{2\pi^{m-1}(m+3)! r}{h^{m-1}} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh}\right)^m\right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}}\right) \right] \\ \cdot \left[\sqrt{2\pi} \left(2 + \left(\frac{\sqrt{2}d}{rh}\right)^m\right) + 2^{\frac{2m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \right]$$

が成り立つ.

次に打ち切り誤差は次のように評価される.

補題 2.2 (打ち切り誤差の評価). $d > 0$ とする. $f: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C}$ を, \mathcal{D}_d 上正則で, 定数 $A > 0$ に対し $|f(z)| \leq A$ ($\forall z \in \mathcal{D}_d$) を満たす関数とする. また m を非負整数, h と r を正数とする. このとき整数 N が $N \geq \max\{2, mr/\sqrt{2}\}$ を満たすならば,

$$\|\mathcal{G}_h^{(m)} f - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f\|_\infty \leq \frac{2A m! e^\pi e^{\frac{3}{2r^2}} r^2}{N(N-1)h^m \pi} \exp\left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2}\right]$$

が成り立つ.

以上の補題より, 与えられた N に対し h と r を適切にとった場合の公式の誤差が次のようになることが分かる.

定理 2.3 (Gauss 核サンプリング公式の誤差評価). $d > 0$ とする. $f: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C}$ を, \mathcal{D}_d 上正則で, 定数 $A > 0$ に対し $|f(z)| \leq A$ ($\forall z \in \mathcal{D}_d$) を満たす関数とする. また m を非負整数とする. 正整数 N に対し, h および r を

$$(2.3) \quad h = \frac{d'}{N} \quad (d' \text{ は } 0 < d' \leq d \text{ なる任意の定数}), \quad r = \sqrt{\frac{N}{\pi}}$$

と定めれば,

$$\|f^{(m)} - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f\|_\infty = O\left(N^{2m-1/2} \exp\left(-\frac{\pi N}{2}\right)\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. N が十分大きければ, (2.3) のもとで, 補題 2.1 および補題 2.2 の適用条件

$$h \leq \min\{2\pi d/\log 2, \pi\} \quad \text{および} \quad N \geq \max\{2, mr/\sqrt{2}\}$$

はそれぞれ満たされる.

$$\|f^{(m)} - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f\|_\infty \leq \|f^{(m)} - \mathcal{G}_h^{(m)} f\|_\infty + \|\mathcal{G}_h^{(m)} f - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f\|_\infty$$

の右辺に両補題の評価を適用すればよい. ここで, \mathcal{D}_d の形を考えれば, 補題 2.1 の結果は誤差評価式中の d を $0 < d' \leq d$ なる d' で置き換えても成り立つことが分かる. このことを踏まえた上で, h と r を(2.3) のようにとれば, まず

$$(2.4) \quad \exp\left(-\frac{\pi d'}{h} + \frac{d'^2}{2r^2 h^2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi N}{2}\right),$$

$$(2.5) \quad \exp\left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2}\right] = O\left(\exp\left(-\frac{\pi N}{2}\right)\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

となる. 次に, 両補題の誤差評価式における(2.4) および(2.5) 以外の部分については, それぞれ $N \rightarrow \infty$ の場合のオーダーが $O(N^{2m-1/2})$ および $O(N^{m-1})$ となることが分かる. 以上より結論が従う. ■

定理 2.3 の評価式は, 1 点 x での近似を想定した形であり, 近似値の計算に必要なサンプル点数 $2N+1$ の関数として近似誤差を評価していることに相当する. しかし, 微分方程式への応用などにおいては, ある有限区間 $[-L, L]$ ($L > 0$) 上での近似を想定すべきであり, その際には, $[-L, L]$ 上での近似値の計算に必要なサンプリング点の総数

$$(2.6) \quad M = 2\left(\frac{L}{d'} + 1\right)N$$

を用いて近似誤差を評価することが妥当であろう (d' は式(2.3)). このように定理 2.3 を書き換えると次の形になる.

系 2.4. $d > 0$ とする. $f: \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C}$ を, \mathcal{D}_d 上正則で, 定数 $A > 0$ に対し $|f(z)| \leq A$ ($\forall z \in \mathcal{D}_d$) を満たす関数とする. また m を非負整数とし, L を正数とする. 正整数 N に対し, h および r を(2.3) のように定め, M を(2.6) で定める. このとき,

$$\sup_{-L \leq x \leq L} \left| f^{(m)}(x) - \left(\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f\right)(x) \right| = O\left(M^{2m-1/2} \exp\left(-\frac{\pi d'}{4(d'+L)}M\right)\right) \quad (M \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

注意 2.5. 式(2.3) の h と r は,

$$\min_{h,r>0} \max \left\{ \exp\left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2}\right), \exp\left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2}\right] \right\}$$

を N に関して漸近的に達成するという意味で「最適」である. 実際, $N-1$ を N で置き換えても漸近的には同じであることに注意して,

$$-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{d}{h} - \pi r^2\right)^2 - \frac{\pi^2 r^2}{2} \geq -\frac{\pi^2 r^2}{2} \quad \left(\text{等号成立は } \frac{d}{h} = \pi r^2 \text{ のとき}\right)$$

かつ

$$-\frac{\pi^2 r^2}{2} = -\frac{N^2}{2r^2} \iff r = \sqrt{\frac{N}{\pi}}$$

より,

$$\begin{aligned} \min_{h,r>0} \max \left\{ \exp\left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2}\right), \exp\left(-\frac{N^2}{2r^2}\right) \right\} &\geq \min_{r>0} \max \left\{ \exp\left(-\frac{\pi^2 r^2}{2}\right), \exp\left(-\frac{N^2}{2r^2}\right) \right\} \\ &\geq \exp\left(-\frac{\pi N}{2}\right) \end{aligned}$$

となり, 等号は h と r を (2.3) のようにとったときに成立する.

2.2 既存の結果との関係

本節では Qian-Ogawa [4] による結果と 2.1 節での結果の関係を調べる. [4] によれば, (1.1) の B_σ に対し, 次の定理が成り立つ.

定理 2.6 ([4] の Corollary 3.1 の系). $f \in B_\sigma$ かつ $0 < h < \pi/\sigma$ のもとで, 十分大きい整数 N に対し $r = \sqrt{(N-2)/(\pi-h\sigma)}$ として,

$$(2.7) \quad \left\| f^{(m)} - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{N-2}} \exp\left[-\frac{(\pi-h\sigma)(N-2)}{2}\right]\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

以下において 2.1 節の結果から, $m=0$ の場合には (2.7) が, $m \geq 0$ の場合には (2.7) より少し弱い結果

$$(2.8) \quad \left\| f^{(m)} - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right\|_\infty = O\left((N-2)^{(m-1)/2} \exp\left[-\frac{(\pi-h\sigma)(N-2)}{2}\right]\right) \quad (N \rightarrow \infty).$$

が導かれることを示す². まず次の補題を示す. これは Paley-Wiener の定理の一部と見なせる.

補題 2.7. $f \in B_\sigma$ ならば, f は \mathbf{C} 上正則であり, ある定数 $A' > 0$ が存在して

$$(2.9) \quad |f(z)| \leq A' \exp(\sigma |\operatorname{Im} z|) \quad (z \in \mathbf{C})$$

が成り立つ.

²一般に $m \geq 1$ の場合に式 (2.7) が導出されないのは, 我々の離散化誤差の評価がより一般的な条件下で行われていることに起因する.

証明. $f \in B_\sigma$ の条件から, f の Fourier 変換を \hat{f} と書けば $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ であって,

$$(2.10) \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{f}(\omega) \exp(iz\omega) d\omega$$

となる. 積分区間が有界であることから, 積分記号下での微分を行うことができる. よって f は \mathbf{C} 上正則である.

次に, 再び(2.10)より, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\begin{aligned} |f(\xi + i\eta)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)| |\exp(i(\xi + i\eta)\omega)| d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)| \exp(-\eta\omega) d\omega \\ &\leq \exp(|\eta|\sigma) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)| d\omega \end{aligned}$$

となるので, $A' = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)| d\omega$ とおけば(2.9)の評価が得られる. なお, A' が有限値であることは, $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ であることに注意して, Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left(\int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)| d\omega \right)^2 \leq \int_{-\sigma}^{\sigma} d\omega \int_{-\sigma}^{\sigma} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

と示される. ■

補題 2.7 より, $f \in B_\sigma$ のとき補題 2.1 および補題 2.2 が適用できる. これらの補題に現れる定数 d は任意の正数でよく, 定数 A は

$$(2.11) \quad A = A' \exp(\sigma d)$$

ととれる. 以下 r は定理 2.6 のとおりにとり, N は十分大きいものとする.

離散化誤差を評価するために,

$$d = h(N - 2)$$

とし, (2.11) のように A を定めて補題 2.1 の評価式を計算すると,

$$\begin{aligned} \|f^{(m)} - \mathcal{G}_h^{(m)} f\|_\infty &\leq A' \exp\left(\sigma d - \frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2}\right) \frac{\left[\frac{2\pi^{m-1}(m+3)! r}{h^{m-1}} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh}\right)^m\right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}}\right) \right]}{\left[\sqrt{2\pi} \left(2 + \left(\frac{\sqrt{2}d}{rh}\right)^m\right) + 2^{\frac{2m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \right]} \end{aligned}$$

となる. 下線部の $(N-2)$ の式としての次数は $(m-1)/2$ である. 残りの指数関数部分の指数を計算すると

$$\begin{aligned}\sigma d - \frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} &= -\frac{(\pi - h\sigma)d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} \\ &= -(\pi - h\sigma)(N-2) + \frac{(\pi - h\sigma)h^2(N-2)^2}{2(N-2)h^2} \\ &= -\frac{(\pi - h\sigma)(N-2)}{2}\end{aligned}$$

となるので, 以上をまとめて次の評価が得られる:

$$(2.12) \quad \left\| f^{(m)} - \mathcal{G}_h^{(m)} f \right\|_{\infty} = O \left((N-2)^{(m-1)/2} \exp \left[-\frac{(\pi - h\sigma)(N-2)}{2} \right] \right) \quad (N \rightarrow \infty).$$

次に打切り誤差を評価するために, $d=1$ とし, (2.11) にしたがって $A = A'e^{\sigma}$ とする. このとき補題 2.2 の評価式を計算すると,

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{G}_h^{(m)} f - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right\|_{\infty} &\leq \frac{2A'e^{\sigma} m! e^{\pi} e^{\frac{3}{2r^2}} r^2}{N(N-1)h^m \pi} \exp \left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2} \right] \\ &\leq \frac{2A'e^{\sigma} m! e^{\pi} e^{\frac{3}{2r^2}} r^2}{h^m \pi (N-2)^2} \exp \left[-\frac{(N-2)^2}{2r^2} \right]\end{aligned}$$

となる. $r^2/(N-2)^2$ の $(N-2)$ の式としての次数は -1 であり, また $e^{\frac{3}{2r^2}} \rightarrow 1$ ($N \rightarrow \infty$) である. 残りの指数関数部分の指数を計算すると

$$-\frac{(N-2)^2}{2r^2} = -\frac{(\pi - h\sigma)(N-2)}{2}$$

となるので, 以上をまとめて次の評価が得られる:

$$(2.13) \quad \left\| \mathcal{G}_h^{(m)} f - \mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right\|_{\infty} = O \left(\frac{1}{N-2} \exp \left[-\frac{(\pi - h\sigma)(N-2)}{2} \right] \right) \quad (N \rightarrow \infty).$$

式(2.12)および(2.13)より, $m \geq 0$ のとき(2.8)が導かれる. また $m=0$ のときには(2.7)が導かれる.

注意 2.8. 上の定理 2.3 と Qian-Ogawa の定理 2.6 とでは, 公式を設計する際の前提として, h を N に依存させるかどうかという点が異なっていることに注意すべきである. 定理 2.3 において d を任意の正数にとれる場合 (帯域制限されている関数はこの場合に該当する) は h を固定しておいても指数関数的な誤差評価が可能であるのに対し, \mathcal{D}_d における正則関数を対象とする場合には h を固定したままではうまくいかない.

3. 数値実験

本節では Gauss 核サンプリング公式の適用実験を、複素領域に特異点を持つ有理関数³および帯域制限されている関数の双方に対して行う。後者を扱う目的は、帯域制限の有無が、我々の Gauss 核サンプリング公式の適用条件に影響しないことを確認することである。

数値実験においては \mathbf{R} 上での誤差を計算することはできないので、有限区間 $[-3, 3]$ における誤差を提示する。誤差を数値的に計算する際の関数評価は、区間 $[-3, 3]$ を 6000 等分した 0.001 刻みの各点において行った。計算のためのプログラムは C 言語で、拡張倍精度浮動小数点数 long double を用いて作成した。計算機の CPU は Sun Microsystems の SPARC で、long double のサイズは 16 バイトである。

以下に示すグラフにおいて、縦軸は誤差の対数

$$(3.1) \quad \log_{10} \left(\sup_{-3 \leq x \leq 3} \left| f(x) - \left(\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right) (x) \right| \right)$$

であり、横軸は公式 $\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f$ に現れる N と $M = 2(3/d + 1)N$ ((2.6) において $L = 3$ とおいたもの) である。

結果の表示方法は、代表例についてはグラフを用い、それ以外については $N = 10$ および $N = 40$ の場合の数値を表にまとめた。これは、結果のグラフが、代表例とほぼ同じ直線の形になったためである。

定理 2.3 によれば横軸を N と見た場合の誤差のグラフの傾きの理論値は、

$$(3.2) \quad -\frac{\pi}{2} \log_{10} e = -0.682 \dots$$

である。この理論値との比較を目的として、誤差のグラフに加えて、最小二乗法によって計算した各グラフの傾きを示した。

3.1 複素領域に特異点を持つ有理関数

$\alpha \geq 0$ に対し、被近似関数を

$$(3.3) \quad f_{\alpha,d}(z) = \frac{z^{2-\alpha}}{z^2 + d^2} \quad (z \in \mathbf{C})$$

と定める。このとき $f_{\alpha,d}$ は $0 < \varepsilon \ll d$ なる ε に対し $D_{d-\varepsilon}$ で正則かつ有界である。本小節では、 $\alpha = 2, 1, 0$, $d = 10^{-i}$ ($i = 0, 1, 2$), $m = 0, 1, 2$ について実際に Gauss 核サンプリング公式を適用する計算を行った。 h の設定は、各 d に対し $\varepsilon = d/100$ とし、 $h = (d - \varepsilon)/N$ とした。また、丸め誤差の影響を避けるため、傾きを計算する際には $N = 45, 50$ のデータを除外した。

³このような関数は一般に帯域制限されていない。

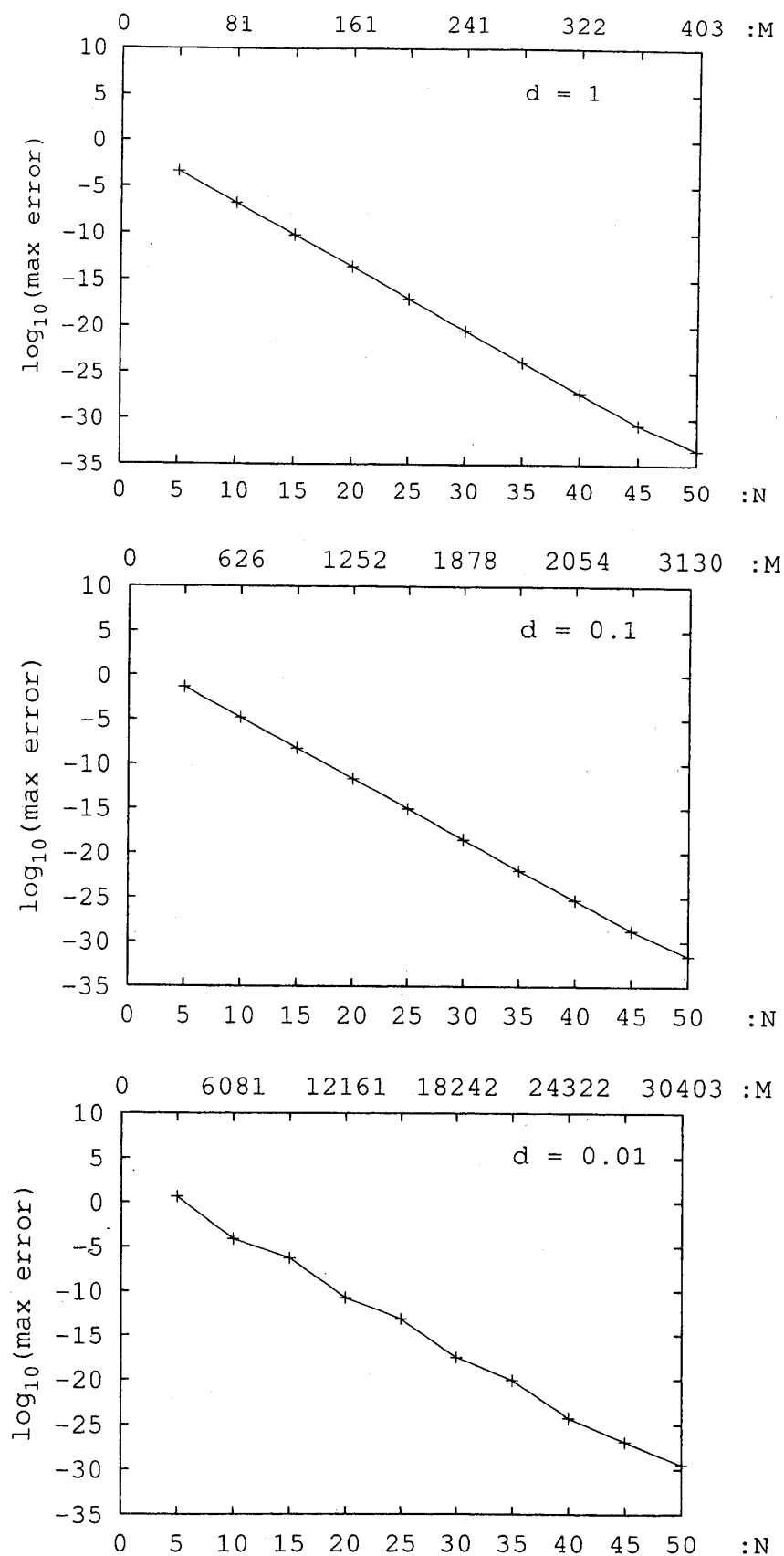


Fig. 1. Errors for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 2$ and for $m = 0$.

Table 1. \log_{10} (max error) for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 2$.

	$m = 0$		$m = 1$		$m = 2$	
	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$
$d = 1.00$	-6.77	-27.28	-5.29	-25.19	-3.52	-22.80
$d = 0.10$	-4.77	-25.32	-2.29	-22.20	0.48	-18.84
$d = 0.01$	-4.09	-24.29	0.45	-19.55	4.43	-14.96

Table 2. \log_{10} (max error) for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 1$.

	$m = 0$		$m = 1$		$m = 2$	
	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$
$d = 1.00$	-6.94	-27.45	-5.31	-25.21	-3.58	-22.84
$d = 0.10$	-5.96	-26.47	-3.31	-23.21	-0.59	-19.84
$d = 0.01$	-6.09	-26.42	-1.31	-21.21	2.18	-17.18

Table 3. \log_{10} (max error) for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 0$.

	$m = 0$		$m = 1$		$m = 2$	
	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$
$d = 1.00$	-6.89	-27.35	-5.40	-25.26	-3.65	-22.87
$d = 0.10$	-6.90	-27.39	-4.41	-24.26	-1.66	-20.87
$d = 0.01$	-7.38	-28.14	-3.53	-23.52	0.34	-18.87

Table 4. \log_{10} (max error)/ N for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 2$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$d = 1.00$	-0.684	-0.660	-0.635
$d = 0.10$	-0.686	-0.660	-0.636
$d = 0.01$	-0.692	-0.664	-0.639

Table 5. $\log_{10}(\text{max error})/N$ for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 1$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$d = 1.00$	-0.684	-0.660	-0.634
$d = 0.10$	-0.685	-0.660	-0.634
$d = 0.01$	-0.691	-0.660	-0.638

Table 6. $\log_{10}(\text{max error})/N$ for $f_{\alpha,d}$ of (3.3) with $\alpha = 0$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$d = 1.00$	-0.681	-0.658	-0.632
$d = 0.10$	-0.683	-0.658	-0.632
$d = 0.01$	-0.694	-0.663	-0.632

まず、誤差のグラフの傾きについては、Table 4-Table 6のように、式(3.2)の理論値に比較的近い値が出ている。導関数の階数 m の増加に伴って傾きが理論値よりも大きくなってしまいう傾向が見られるが、これは理論値の計算において定理 2.3 の誤差評価式中の $\exp(-(\pi/2)N)$ のみを用いたためであって、実際には $N^{2m-1/2}$ の影響が現れていると考えられる。

次に、 m の影響について考える。 N に関するオーダーに着目すると、定理 2.3 より、 m が 1 増加すると $\log_{10}(\text{誤差})$ が $2\log_{10} N$ 程度は増加することが予想できる。詳しく見れば誤差評価式中の N に依らない定数部分にも m が含まれるが、Table 4-Table 6 の実験結果は、誤差が予想値程度の増加を示していると言えよう。

次に、 d の影響について考える。 N に関するオーダーに着目すると d の影響はないことになってしまう。しかし、補題 2.1 の評価式中の $1/d^{m+1}$ に着目すると、 d が 1/10 倍になれば $\log_{10}(\text{誤差})$ が $m+1$ 程度増加することが予想できる。もちろん、これは大雑把な見積りだが、やはり実験結果にはこの予想に近い傾向が現れていると言えよう。

最後に α の影響についてであるが、これは実験結果を見ればわかるとおり、それほど大きな影響はない。この結果は理論的に妥当と言える。

3.2 帯域制限された関数

l を正整数として、被近似関数を

$$(3.4) \quad f_l(z) = (\text{sinc}(z))^l \quad (z \in \mathbf{C})$$

とおくと $f_l \in B_{\pi l}$ である. f_l は \mathbf{C} 上で正則で, 任意の $d > 0$ に対し,

$$(3.5) \quad |f(z)| \leq \max \left\{ \left(\frac{e^{\pi d}}{\pi} \right)^l, e^{\pi l} \right\} \quad (z \in \mathcal{D}_d)$$

を満たす. (2.3) にしたがって $h = 1/N$, $r = \sqrt{N/\pi}$ とし, $l = 5, 10, 15, 20$, $m = 0, 1, 2$ の各場合について公式を適用した. なお, 傾きを計算する際には, $N = 5, 10, 45, 50$ のデータを除外した.

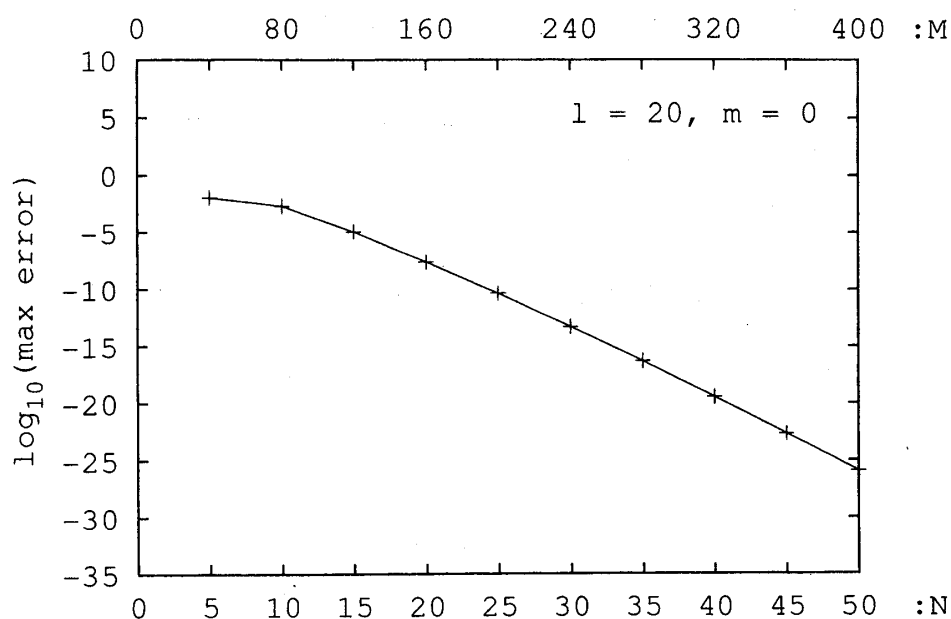


Fig. 2. Errors for $f = \text{sinc}^{20}$ with $m = 0$ and $d = 1$.

Table 7. $\log_{10}(\text{max error})$ for $f = \text{sinc}^l$ with $d = 1$.

	$m = 0$		$m = 1$		$m = 2$	
	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$
$l = 5$	-5.18	-25.48	-3.67	-23.39	-1.98	-21.01
$l = 10$	-3.99	-23.18	-2.39	-21.09	-0.81	-18.74
$l = 15$	-3.18	-21.20	-1.66	-19.09	-0.11	-16.78
$l = 20$	-2.70	-19.49	-1.23	-17.38	0.34	-15.09

Table 8. $\log_{10}(\max \text{ error})/N$ for $f = \text{sinc}^l$ with $d = 1$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$l = 5$	-0.680	-0.664	-0.645
$l = 10$	-0.653	-0.638	-0.618
$l = 15$	-0.618	-0.605	-0.583
$l = 20$	-0.583	-0.568	-0.546

まず、導関数の階数 m の誤差への影響については、3.1 節と同様の説明が可能である。

次に、誤差のグラフの傾きについては、 l が小さい場合は(3.2) の理論値に比較的近い値が出ている (Table 8). しかし、 l が大きい場合はそうではない。これは、 l が大きいとき(3.5) の右辺の定数が大きくなり ($d = 1$ としていることに注意), その影響が無視できなくなるためと考えられる。

そこで、(3.5) において $d = \pi^{-1} \log \pi$ とおいた場合、つまり $h = (\pi N)^{-1} \log \pi$ とおいた場合の実験も行って見た。このとき(3.5) において $e^{\pi d} / \pi = 1$ となる。結果は Fig. 3 および Table 9, Table 10 のようになり、前述の考察が支持される。数値計算の観点からは、振動が強い関数に対しては刻み幅を細かくしたほうがよい近似ができるであろうという推察を裏付ける結果になっている。

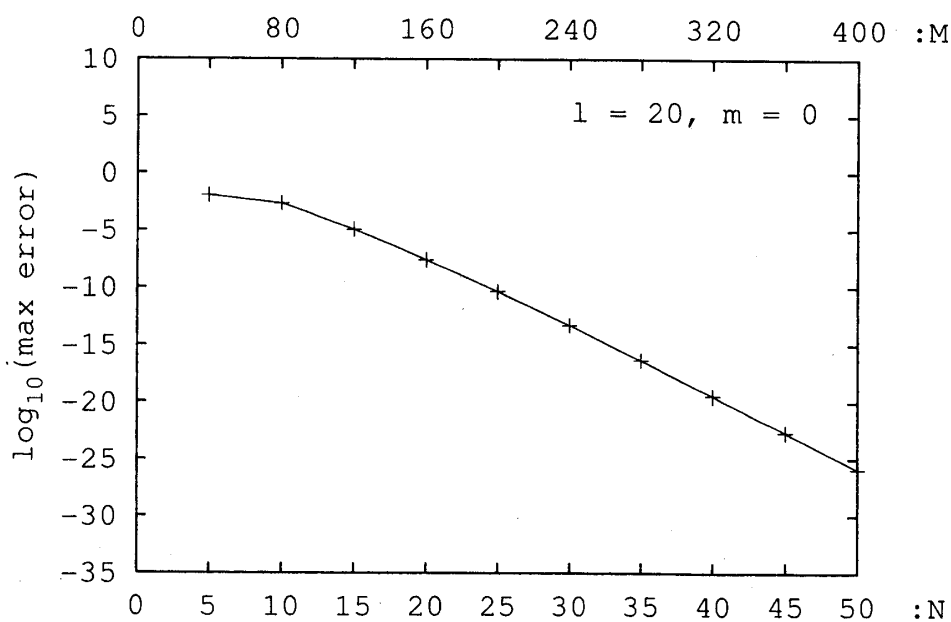
Fig. 3. Errors for $f = \text{sinc}^{20}$ with $m = 0$ and $d = \pi^{-1} \log \pi$.

Table 9. $\log_{10}(\text{max error})$ for $f = \text{sinc}^l$ with $d = \pi^{-1} \log \pi$.

	$m = 0$		$m = 1$		$m = 2$	
	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$	$N = 10$	$N = 40$
$l = 5$	-6.94	-27.69	-5.01	-25.15	-2.79	-22.32
$l = 10$	-6.55	-27.25	-4.63	-24.72	-2.42	-21.49
$l = 15$	-6.20	-26.83	-4.28	-24.29	-2.09	-21.16
$l = 20$	-5.89	-26.41	-3.97	-23.88	-1.80	-20.62

Table 10. $\log_{10}(\text{max error})/N$ for $f = \text{sinc}^l$ with $d = \pi^{-1} \log \pi$.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$l = 5$	-0.690	-0.673	-0.656
$l = 10$	-0.689	-0.672	-0.643
$l = 15$	-0.688	-0.670	-0.644
$l = 20$	-0.685	-0.668	-0.638

4. 証明

4.1 補題 2.1 の証明

$n \in \mathbf{Z}_+$ に対し $V_n := \{x + yi \mid |x| = (n + 1/2)h, |y| \leq d\}$, $U_n := \{x + yi \mid |x| \leq (n + 1/2)h, |y| = d\}$ とする. ここで \mathbf{Z}_+ は非負整数の集合を表す. 留数定理により

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{k=-n}^n f(kh) \left(\frac{\sin(\pi(x - kh)/h)}{\pi(x - kh)/h} \exp \left[-\frac{(x - kh)^2}{2r^2h^2} \right] \right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_n \cup U_n} \frac{\sin(\pi x/h)}{z - x} \exp \left[-\frac{(x - z)^2}{2r^2h^2} \right] \frac{f(z)}{\sin(\pi z/h)} dz \end{aligned}$$

となるので,

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{V_n \cup U_n} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi x/h)}{z - x} \exp \left[-\frac{(x - z)^2}{2r^2h^2} \right] \right) \frac{f(z)}{\sin(\pi z/h)} dz$$

の評価をすればよい. ここで,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi x/h)}{z-x} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right) \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m!}{l!(m-p)!} \frac{(-1)^{m-l}}{(\sqrt{2}rh)^{m-p}} \left(\frac{\pi}{h} \right)^l \frac{\sin(\pi x/h + \pi l/2)}{(z-x)^{p-l+1}} H_{m-p} \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}rh} \right) \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \end{aligned}$$

に注意しておく. $H_j(x)$ は j 次のエルミート多項式

$$(4.3) \quad H_j(x) := (-1)^j \exp(x^2) \frac{d^j}{dx^j} \exp(-x^2) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i j! (2x)^{j-2i}}{i!(j-2i)!}$$

である.

V_n 上の積分の評価. (4.2) より,

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_n} \frac{1}{|z-x|^{p-l+1}} \left| H_{m-p} \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}rh} \right) \right| \left| \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right| \frac{|f(z)|}{|\sin(\pi z/h)|} |dz| = 0$$

を示せば(4.1) の V_n 上の積分が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束することが導かれる. 以下, n は十分大きいものとする. $z \in V_n$ に対して

$$\begin{aligned} (n+1/2)h - L &\leq |z-x| \leq (n+1/2)h + L + d, \\ \operatorname{Re}(x-z)^2 &= [\pm(n+1/2)h - x]^2 - (\operatorname{Im}z)^2 \geq [(n+1/2)h - L]^2 - d^2, \\ |z| &\leq (n+1/2)h + d, \\ |\sin(\pi z/h)| &= |\cosh(\pi \operatorname{Im}z/h)| \geq 1 \end{aligned}$$

と評価できるので,

$$\begin{aligned} & \int_{V_n} \frac{1}{|z-x|^{p-l+1}} \left| H_{m-p} \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}rh} \right) \right| \left| \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right| \frac{|f(z)|}{|\sin(\pi z/h)|} |dz| \\ &\leq 4d \cdot \frac{A}{[(n+1/2)h - L]^{p-l+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{2^{j-2i} j!}{i!(j-2i)!} \left(\frac{(n+1/2)h + L + d}{\sqrt{2}rh} \right)^{j-2i} \right] \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{[(n+1/2)h - L]^2 - d^2}{2r^2 h^2} \right] \end{aligned}$$

となる. ここで $j = m - p$ である. この式から(4.4) が従う.

U_n 上の積分の評価. まず(4.2) より

$$(4.5) \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{U_n} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi x/h)}{z-x} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right) \frac{f(z)}{\sin(\pi z/h)} dz \right| \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{U_n} \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m!}{l!(m-p)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^{m-p} \left(\frac{\pi}{h} \right)^l \frac{1}{|z-x|^{p-l+1}} \\ \cdot \left| H_{m-p} \left(\frac{x-z}{\sqrt{2rh}} \right) \right| \left| \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right| \frac{|f(z)|}{|\sin(\pi z/h)|} |dz|$$

となる. $z = t \pm di$ ($t \in \mathbf{R}$) のとき,

$$\frac{1}{|z-x|^{p-l+1}} = \frac{1}{|t-x \pm di|^{p-l+1}} \leq \frac{1}{d^{p-l+1}} \leq \max \left\{ \frac{1}{d}, \frac{1}{d^{m+1}} \right\} \leq \frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}}, \\ \left| \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right| = \left| \exp \left[-\frac{(x-t)^2 \mp 2(x-t)di - d^2}{2r^2 h^2} \right] \right| = \exp \left[-\frac{(x-t)^2}{2r^2 h^2} \right] \exp \left(\frac{d^2}{2r^2 h^2} \right), \\ \frac{1}{|\sin(\pi z/h)|} \leq \frac{1}{\sinh(\pi d/h)} \leq 4 \exp \left(-\frac{\pi d}{h} \right) \quad (\because \text{補題の仮定より } h \leq 2\pi d / \log 2)$$

と評価できるので, これらと(4.5) とから

$$(4.6) \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{U_n} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi x/h)}{z-x} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right) \frac{f(z)}{\sin(\pi z/h)} dz \right| \\ \leq \frac{2m!}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}} \right) \exp \left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} \right) A \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-t)^2}{2r^2 h^2} \right] \\ \cdot \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{1}{l!(m-p)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^{m-p} \left(\frac{\pi}{h} \right)^l \left[\left| H_{m-p} \left(\frac{x-t-di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| + \left| H_{m-p} \left(\frac{x-t+di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| \right] dt \\ \leq \frac{2(m+1)!}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}} \right) \exp \left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} \right) \left(\frac{\pi}{h} \right)^m A \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-t)^2}{2r^2 h^2} \right] \\ \cdot \sum_{p=0}^m \frac{1}{(m-p)!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^{m-p} \left[\left| H_{m-p} \left(\frac{x-t-di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| + \left| H_{m-p} \left(\frac{x-t+di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| \right] dt$$

となる. $\xi = (x-t)/(rh)$ において置換積分すると, (4.6) の積分の部分は

$$(4.7) \quad A \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^j \left[\left| H_j \left(\frac{rh\xi - di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| + \left| H_j \left(\frac{rh\xi + di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| \right] rh d\xi$$

となる.

(4.7) において, エルミート多項式の部分を評価する. (4.3) より, $\zeta \in \mathbf{C}$ に対し,

$$|H_j(\zeta)| \leq 2^j j! \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} |\zeta|^{j-2i} \leq 2^j j! \frac{j+2}{2} \max\{1, |\zeta|^j\} \leq 2^{j-1} j!(j+2)(1+|\zeta|^j)$$

となる. よってさらに,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^j |H_j(\zeta)| &\leq \sum_{j=0}^m \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^j \frac{(j+2)}{2} (1 + |\zeta|^j) \\
 &\leq \frac{(m+2)}{2} \max \left\{ 1, \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right\} \sum_{j=0}^m (1 + |\zeta|^j) \\
 &\leq \frac{(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] \sum_{j=0}^m (1 + |\zeta|^j) \\
 &\leq \frac{(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] (m+1) (1 + \max\{1, |\zeta|^m\}) \\
 &\leq \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] (2 + |\zeta|^m)
 \end{aligned}$$

となる. ここで $\zeta = (rh\xi \pm di)/\sqrt{2rh}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{\sqrt{2rh}} \right)^j \left| H_j \left(\frac{rh\xi \pm di}{\sqrt{2rh}} \right) \right| &\leq \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] \left(2 + \left| \frac{\xi}{\sqrt{2}} \pm \frac{di}{\sqrt{2rh}} \right|^m \right) \\
 &\leq \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] \left[2 + \left(\left| \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{d}{\sqrt{2rh}} \right| \right)^m \right] \\
 &\leq \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right] \left[2 + 2^{m-1} \left(\left| \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right|^m + \left| \frac{d}{\sqrt{2rh}} \right|^m \right) \right]
 \end{aligned}$$

となる. 最後の不等式で, 一般に任意の非負実数 a, b および非負整数 m に対し, 関数 $x \mapsto x^m$ の凸性より $(a+b)^m \leq 2^{m-1}(a^m + b^m)$ が成り立つことを用いた. このとき $m=0$ の場合もこの不等式が成り立つことに注意せよ.

以上の(4.6), (4.7), (4.8)をあわせると,

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{U_n} \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi x/h)}{(z-x)} \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{2r^2 h^2} \right] \right) \frac{f(z)}{\sin(\pi z/h)} dz \right| \\ & \leq \frac{2(m+1)!}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}} \right) \exp \left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} \right) \left(\frac{\pi}{h} \right)^m r h (m+1)(m+2) \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right) \\ & \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2} \right) A \left[2 + 2^{m-1} \left(\left| \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right|^m + \left| \frac{d}{\sqrt{2}rh} \right|^m \right) \right] d\xi \\ & \leq \exp \left(-\frac{\pi d}{h} + \frac{d^2}{2r^2 h^2} \right) \cdot A \left[\frac{2\pi^{m-1}(m+3)! r}{h^{m-1}} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{rh} \right)^m \right) \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d^{m+1}} \right) \right] \\ & \quad \cdot \left[\sqrt{2\pi} \left(2 + \left(\frac{\sqrt{2}d}{rh} \right)^m \right) + 2^{\frac{2m+1}{2}} \Gamma \left(\frac{m+1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

となる.

4.2 補題 2.2 の証明

次の補題を準備しておく.

補題 4.1. N を正整数とし, r を正の数とする. このとき,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \exp \left(-\frac{n^2}{2r^2} \right) \leq \frac{r^2}{N} \exp \left(-\frac{N^2}{2r^2} \right)$$

が成り立つ.

証明. x の関数 $x \mapsto \exp[-x^2/(2r^2)]$ は $x > 0$ で減少関数なので, 積分による評価

$$(4.9) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp \left(-\frac{n^2}{2r^2} \right) \leq \int_N^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2r^2} \right) dx$$

が成り立つ. (4.9) の右辺の積分を I とおくと,

$$I = \sqrt{2}r \int_{N/(\sqrt{2}r)}^{\infty} \exp(-u^2) du \leq \sqrt{2}r \cdot \frac{\sqrt{2}r}{2N} \exp \left(-\frac{N^2}{2r^2} \right) = \frac{r^2}{N} \exp \left(-\frac{N^2}{2r^2} \right)$$

と評価できる. なお, ここで, 一般に $t > 0$ のとき

$$\int_t^{\infty} \exp(-u^2) du \leq \frac{\exp(-t^2)}{2t}$$

が成り立つことを用いた. ■

さて、補題 2.2 の証明にはいる. (4.2) と同様にして,

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\sin(\pi(x-kh)/h)}{\pi(x-kh)/h} \exp \left[-\frac{(x-kh)^2}{2r^2h^2} \right] \right) \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m!}{l!(m-p)!} \frac{(-1)^{m-l}}{(\sqrt{2}rh)^{m-p}} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{l-1} \\ & \quad \cdot \frac{\sin(\pi(x-kh)/h + \pi l/2)}{(x-kh)^{p-l+1}} H_{m-p} \left(\frac{x-kh}{\sqrt{2}rh} \right) \exp \left[-\frac{(x-kh)^2}{2r^2h^2} \right] \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} (4.10) \quad & \left| \left(\mathcal{G}_h^{(m)} f \right) (x) - \left(\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right) (x) \right| \\ & \leq \sum_{\substack{k - [x/h] > N \text{ または} \\ k - [x/h] < -N}} |f(kh)| \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m!}{l!(m-p)!} \frac{1}{(\sqrt{2}rh)^{m-p}} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{l-1} \\ & \quad \cdot \frac{1}{h^{p-l+1} |x/h - k|^{p-l+1}} \left| H_{m-p} \left(\frac{x/h - k}{\sqrt{2}r} \right) \right| \exp \left[-\frac{(x/h - k)^2}{2r^2} \right] \end{aligned}$$

となる.

まず $k - [x/h] > N$ の場合の和を評価する. この場合

$$(4.11) \quad N < k - \left[\frac{x}{h} \right] \leq k - \frac{x}{h} \leq k - \left[\frac{x}{h} \right] + 1$$

であることに注意しておく.

一般に(4.3) より, $t \in \mathbf{R}$ に対し

$$a_i(t) := \frac{j!(2t)^{j-2i}}{i!(j-2i)!}$$

とおけば $H_j(t) = \sum_{i=0}^{[j/2]} (-1)^i a_i(t)$ と表され, $a_i(t)$ ($i = 0, \dots, [j/2]$) は定符号である. さらに, $|t| \geq j/2$ のとき $|a_0(t)| \geq \dots \geq |a_{[j/2]}(t)|$ となり, したがって交代級数の絶対値の評価を考えて $|H_j(t)| \leq |a_0(t)|$ である.

今, 補題の仮定から $k - x/h > N \geq mr/\sqrt{2}$ となるので, 上記の議論において $t = (k - x/h)/(\sqrt{2}r)$ とすれば, $j = 0, 1, \dots, m$ に対して

$$(4.12) \quad \left| H_j \left(\frac{x/h - k}{\sqrt{2}r} \right) \right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}|x/h - k|}{r} \right)^j = \left[\frac{\sqrt{2}(k - x/h)}{r} \right]^j$$

が成り立つ.

(4.11) と (4.12) の評価を踏まえると,

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad & \sum_{k-\lfloor x/h \rfloor > N} |f(kh)| \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m!}{l!(m-p)!} \frac{1}{(\sqrt{2r}h)^{m-p}} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{l-1} \\
 & \cdot \frac{1}{h^{p-l+1} |x/h - k|^{p-l+1}} \left| H_{m-p} \left(\frac{x/h - k}{\sqrt{2r}} \right) \right| \exp \left[-\frac{(x/h - k)^2}{2r^2} \right] \\
 & \leq \frac{A}{Nh^m} \sum_{k-\lfloor x/h \rfloor > N} \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m! \pi^{l-1}}{l!(m-p)!} \left(\frac{k - \lfloor x/h \rfloor + 1}{r^2} \right)^{m-p} \exp \left[-\frac{(k - \lfloor x/h \rfloor)^2}{2r^2} \right] \\
 & \leq \frac{A}{Nh^m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m! \pi^{l-1}}{l!(m-p)!} \left(\frac{n+1}{r^2} \right)^{m-p} \exp \left(-\frac{n^2}{2r^2} \right)
 \end{aligned}$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^p \frac{\pi^{l-1}}{l!} & \leq \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi^l}{l!} = \frac{e^\pi}{\pi}, \\
 \sum_{p=0}^m \frac{1}{(m-p)!} \left(\frac{n+1}{r^2} \right)^{m-p} & \leq \exp \left(\frac{n+1}{r^2} \right)
 \end{aligned}$$

なる評価が成立することに注意すると,

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & \frac{A}{Nh^m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{p=0}^m \sum_{l=0}^p \frac{m! \pi^{l-1}}{l!(m-p)!} \left(\frac{n+1}{r^2} \right)^{m-p} \exp \left(-\frac{n^2}{2r^2} \right) \\
 & \leq \frac{Am! e^\pi}{Nh^m \pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp \left(\frac{n+1}{r^2} \right) \exp \left(-\frac{n^2}{2r^2} \right) \\
 & \leq \frac{Am! e^\pi e^{\frac{3}{2r^2}}}{Nh^m \pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp \left[-\frac{(n-1)^2}{2r^2} \right]
 \end{aligned}$$

と評価できる.

ここで補題 4.1 を適用すれば (N を $N-1$ でおきかえればよい),

$$(4.15) \quad \frac{Am! e^\pi e^{\frac{3}{2r^2}}}{Nh^m \pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp \left[-\frac{(n-1)^2}{2r^2} \right] \leq \frac{Am! e^\pi e^{\frac{3}{2r^2}} r^2}{N(N-1)h^m \pi} \exp \left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2} \right]$$

が得られる.

(4.10), (4.13), (4.14), (4.15) および, $k - \lfloor x/h \rfloor < -N$ の場合の和も以上と同様に評価できることに注意すれば,

$$\left| \left(\mathcal{G}_h^{(m)} f \right) (x) - \left(\mathcal{T}_{N,h}^{(m)} f \right) (x) \right| \leq \frac{2Am! e^\pi e^{\frac{3}{2r^2}} r^2}{N(N-1)h^m \pi} \exp \left[-\frac{(N-1)^2}{2r^2} \right]$$

となる. 以上より結論が得られる.

謝辞

証明の誤りを指摘していただいた査読者に謝意を表す。本研究は 21 世紀 COE プログラム情報科学技術戦略コアおよび科学研究費補助金の援助を受けた。また、第一著者は特別研究員奨励費の援助を受けた。

参考文献

- [1] L. W. Qian, On the regularized Whittaker-Kotel'nikov-Shannon sampling formula, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131** (2003), 1169–1176.
- [2] L. W. Qian and D. B. Creamer, Localization of the generalized sampling series and its numerical application, *SIAM J. Numer. Anal.*, **43** (2006), 2500–2516.
- [3] L. W. Qian and D. B. Creamer, A modification of the sampling series with a Gaussian multiplier, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, to appear.
- [4] L. W. Qian and H. Ogawa, Modified sinc kernels for the localized sampling series, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, **4** (2005), 121–139.
- [5] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), 379–423.
- [6] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] F. Stenger, Summary of sinc numerical methods, *J. Comp. Appl. Math.*, **121** (2000), 379–420.
- [8] M. Sugihara and T. Matsuo, Recent developments of the sinc numerical methods, *J. Comput. Appl. Math.*, **164–165** (2004), 673–689.
- [9] 高橋 秀俊, 複素関数論と数値解析, 「数値解析とコンピューター」, 京都大学数理解析研究所講究録, **253** (1975), 24–37.
- [10] G. W. Wei, Quasi wavelets and quasi interpolating wavelets, *Chem. Phys. Lett.*, **296** (1998), 215–222.
- [11] G. W. Wei, D. S. Zhang, D. J. Kouri, and D. K. Hoffman, Lagrange distributed approximating functionals, *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997), 775–779.

著者紹介

田中健一郎 (学生会員) 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

2004年 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻 修士課程修了。
現在, 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻 博士課程に在籍。
日本学術振興会 特別研究員 (DC1)。

杉原正顕 (正会員) 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

1982年 東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻 博士課程修了。
工学博士。現在, 東京大学大学院 情報理工学系研究科 教授。
数値解析の研究に従事。

室田一雄 (正会員) 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

1980年 東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻 修士課程修了。
同年 東京大学 工学部 助手。現在, 東京大学大学院 情報理工学系研究科 教授。
数理工学の研究と教育に従事。工学博士および博士(理学)。

(2006年5月16日受付)

(2007年5月15日最終稿受付)