

写像により変換された曲線の折返し点を用いた位相的エントロピーの計算

福島真太郎^{†a)} 村重 淳^{††b)}

Numerical Calculation of Topological Entropy Using Turning Points of a Curve Transformed by a Map

Shintaro FUKUSHIMA^{†a)} and Sunao MURASHIGE^{††b)}

あらまし 本論文では離散力学系の位相的エントロピーの実用的な計算手法を提案する．この手法のアイデアは，状態空間において写像により変換された曲線の折返し点の個数を位相的エントロピーに結び付けることである．この手法は従来の方法に比べてより広い範囲の系に適用することができる．二次元以上の具体的な写像に対して適用した結果，比較的高次元の系に対しても実用的な計算コストでこの手法を用いることができることが分かった．

キーワード 力学系，位相的エントロピー，数値計算

1. ま え が き

本研究では， C^1 級写像 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ により与えられる離散力学系

$$x_{\nu+1} = f(x_{\nu}) \quad (\nu = 0, 1, \dots) \quad (1)$$

の位相的エントロピーの計算方法について考える．位相的エントロピーは力学系が示す軌道の多様性という観点から力学系の複雑さを定量化する指標である．

位相的エントロピーの数値計算では，次の式 (2) がよく用いられる．

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n(f) \quad (2)$$

ここで， $h(f)$ は写像 f によって与えられる力学系の位相的エントロピー， $N_n(f)$ は写像 f の最小周期が n の約数となる周期点の個数である．位相的エントロピーの数値計算法は，これまでにいくつか提案されて

いる．一次元の離散力学系に対する計算方法には，単峰写像に対してニーディング理論を用いた方法 [4], [5]，写像をマルコフ写像で近似する方法 [9]，全変動の指数的增长率を見積もる方法 [10] がある．それに対して，二次元以上の写像に対しても適用可能な方法には，写像の周期点を含む領域の個数を見積もる方法 [7]，体積の指数的增长率を見積もる方法 [8]，写像の Jacobi 行列の空間積分の指数的增长率を見積もる方法 [11]，状態空間の分割を Markov 分割に近づける方法 [12]，不安定周期軌道を用いて生成分割を構成する方法 [16]，周期点の存在範囲を区間演算で求めその個数の指数的增长率を求める方法 [13] などがある．

本研究では，簡便で高次元写像にも適用可能な方法である Chen らの方法 [7] と Jacobs らの方法 [11] に着目する．Chen らの方法は，写像 f の周期点を含む領域の個数を求め，その指数的增长率を位相的エントロピーとして求める．その際， f の逆像を求めることを要求する．一方，Jacobs らの方法は，写像 f の Jacobi 行列 $Df(x)$ の最大絶対値の固有値 $\lambda_{\max}(x)$ の空間積分の指数的增长率を位相的エントロピーとして求める．この方法は， λ_{\max} が他の点に比べ極端に大きくなる場合に対しては，位相的エントロピーの見積もりを誤ってしまう可能性がある．それに対して，本論文で提案する折返し点法は， f の逆像を用いること

[†](株)富士通総研，東京都
Fujitsu Research Institute, 1-16-1 Kaigan Minato-ku,
Tokyo, 105-0022 Japan

^{††} 公立はこだて未来大学システム情報科学部複雑系科学科，函館市
Department of Complex Systems, Future University-
Hakodate, 116-2 Kamedanakano-cho, Hakodate-shi, 041-
8655 Japan

a) E-mail: sfukushima@jp.fujitsu.com

b) E-mail: murasige@fun.ac.jp

なく、また Jacobs らの方法が問題となる写像に対しても位相的エントロピーの値を見積もることができる。

以下、2. では写像のアトラクタを特徴づける指標として、写像の周期点の個数、写像の Jacobi 行列の最大絶対値 λ_{\max} の空間積分、全変動、写像により変換された曲線の折返し点の個数に着目し、logistic 写像に対して写像の反復回数 k に対するそれぞれの指数的增长率を求める。本研究では写像により変換された曲線の折返し点の個数に着目し、3. で折返し点の個数に着目した位相的エントロピーの計算方法について述べる。4. でいくつかの写像に対して提案手法を適用した結果を示す。

2. アトラクタの複雑さを特徴づける指標の比較

位相的エントロピーを求めるために、本研究ではアトラクタの複雑さを特徴づける指標に着目する。数値計算に適した位相的エントロピーの式 (2) を用いるにあたり、Jacobs ら [11] は写像の周期点の個数と写像の Jacobi 行列 $Df(x)$ の最大絶対値の固有値 $\lambda_{\max}(x)$ の空間積分を、Baldwin ら [10] は写像の周期点の個数と写像の全変動を、それぞれ結び付けている。更に、Misiurewicz ら [15] は一次元の区分的連続関数に対して、写像の全変動と写像による折返し点の個数の指数的增长率が等しいことを示した。そこで、ここでは、アトラクタの複雑さを特徴づける指標として、写像の周期点の個数、写像の Jacobi 行列の最大絶対値の固有値 λ_{\max} の空間積分、全変動、写像により変換された曲線 $f^k(\gamma)$ ($\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$) の折返し点 (以下、折返し点と呼ぶ) の個数に着目する。例として、一次元の logistic 写像

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} &= f(x_\nu) \\ &= ax_\nu(1-x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

に対してこれらの指標を計算したものを図 1 に示す。

logistic 写像 (3) においてパラメータの値が $a = 3.9$ の場合に対して写像の周期点の個数、写像の Jacobi 行列の最大絶対値の固有値 λ_{\max} の空間積分、全変動、写像により変換された曲線 $f^k(\gamma)$ ($\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$) の折返し点の個数を計算したところ、図 2 を得た。

以下、アトラクタの複雑さを特徴づける四つの指標の関係の導出と、位相的エントロピーを見積もる際に有用な指標についての議論を一次元写像に対して行う。二次元以上の写像に対しては 2.2 で述べる。

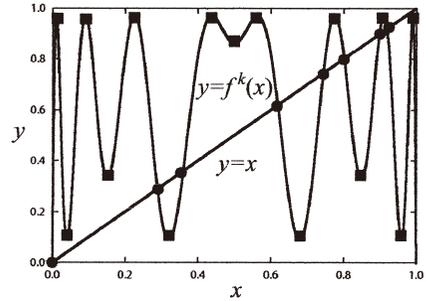


図 1 logistic 写像 (3) ($a = 3.9$) におけるアトラクタの複雑さを特徴づける指標。 : k 周期点。 : 折返し点。この図では $P_k = 8$, $t_k = 15$. L_k は $|df^k/dx|$ の空間積分, $\text{Var}(f^k)$ は隣接折返し点間の y 座標の差の絶対値の和で求める。

Fig. 1 Characteristic indices for the complexity of attractor of the logistic map ($a = 3.9$). : k -periodic points. : turning points. In this figure, $P_k = 8$, $t_k = 15$. L_k is calculated by spatial integration of $|df^k/dx|$ and $\text{Var}(f^k)$ is by the sum of the variations between adjacent turning points.

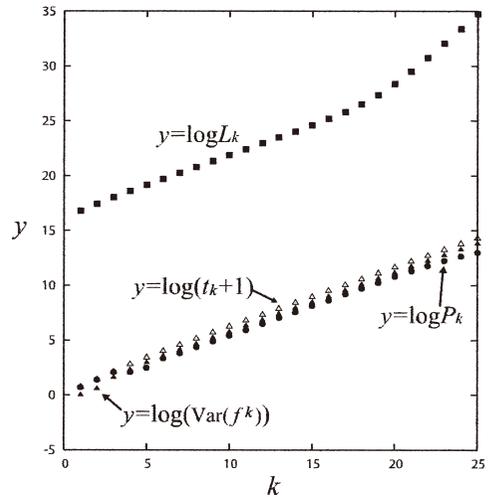


図 2 logistic 写像 (3) ($a = 3.9$) のアトラクタの複雑さを特徴づける指標。 k : 写像の反復回数。 : 周期点の個数 $y = \log P_k$. : λ_{\max} の空間積分 $y = \log L_k$. : 全変動 $y = \log \text{Var}(f^k)$. : 折返し点の個数 $y = \log(t_k + 1)$

Fig. 2 Characteristic indices for the complexity of attractor of logistic map(3) ($a = 3.9$). k : number of iterates of map. : number of periodic points. $y = \log P_k$. : spatial integration of $\lambda_{\max}(x)$ $y = \log L_k$. : total variation. $y = \log \text{Var}(f^k)$. : number of turning points. $y = \log(t_k + 1)$.

2.1 一次元写像

単位区間 $I = [0, 1]$ 上の一次元写像 $f: I \rightarrow I$ を考える。 f の k 周期点の個数を P_k , f^k の微分係数の空

間積分を $L_k = \int_{(f^k)^{-1}(I)} |\lambda^{(k)}(x)| dx$ とする。ここで、 $\lambda^{(k)}(x) = df^k(x)/dx$ であり、この値を $I \cap (f^k)^{-1}(I)$ 上で積分したものが L_k である。また、写像 f の全変動を $\text{Var}(f^k)$ 、折返し点の個数を t_k と表す。これらの諸量の間には、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log P_k &\approx \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log L_k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Var}(f^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(t_k + 1) \end{aligned} \quad (4)$$

という関係がある。それぞれの関係は以下のように考えることができる。

(i) P_k と L_k の関係

周期点の個数 P_k の指数的大増度を微分係数の空間積分 L_k の指数的大増度で近似できることを示す。単位区間 $I = [0, 1]$ を互いに交わらない N 個の区間 I_i ($i = 0, 1, \dots, N$) に分割する。このとき、移行行列 $A = (a_{ij})$ を、

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 1 & (I_j \cap f(I_i) \neq \phi) \\ 0 & (I_j \cap f(I_i) = \phi) \end{cases} \quad (5)$$

で定める。また、記号力学系のシフト写像 σ を $\sigma(s_0 s_1 \dots) = (s_1 s_2 \dots)$ を満たす写像と定義する。分割数 N が十分大きいとき、写像 f の k 周期点の個数 P_k は、

$$P_k \simeq \text{tr}(A^k) \quad (6)$$

と見積もることができる(ここで、 tr はトレースを表す)。この理由は、写像 f の k 周期点 $p^{(k)*}$ に対して、

$$f^\nu(p^{(k)*}) \in I_{s_\nu} \quad (\nu = 0, \dots, k-1) \quad (7)$$

とすると、周期点 $p^{(k)*}$ は記号列 $s_0 s_1 \dots s_{k-1}$ で表される。そのような k 周期点 $p^{(k)*}$ を表した記号列では $s_0 = s_k$ となるので、その個数は $\text{tr}(A^k)$ で表すことができる[1]。分割数 N が十分大きくなるにつれて、異なる k 周期の記号列の個数はもとの力学系の異なる k 周期点の個数に近くなる。また移行行列 A の最大固有値を λ_σ と表すと、 k が大きくなるにつれて $\text{tr}(A^{(k)})$ の中で支配的になるのは $(\lambda_\sigma)^k$ の項である。したがって、

$$\text{tr}(A^k) \sim (\lambda_\sigma)^k \quad (8)$$

が成り立つ。分割数 N を十分大きくとると、もとの力学系 f と記号力学系 σ は同じ振舞いをすると考え

られるので、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log P_k \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log L_k \quad (9)$$

を得る。(9) は f と σ が位相共役の関係にあるときに等号が成り立つ。また、一般の写像に対しても、(9) の関係が近似的に成り立つ場合があることが数値実験で確かめられている [6], [11], [13]。

(ii) L_k と $\text{Var}(f^k)$ の関係

微分係数の空間積分 L_k と全変動 $\text{Var}(f^k)$ の指数的大増率が等しいことを示す。 f^k の単調な区間を $J_i = [x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, t_k$) とおく。 $x_1 = 0$, $x_{t_k+1} = 1$ である。このとき、 $\text{Var}(f^k)$ は、

$$\text{Var}(f^k) = \sum_{i=1}^{t_k} |f^k(x_{i+1}) - f^k(x_i)| \quad (10)$$

と表される。写像の反復回数 k が大きくなると、 J_i の幅 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ は 0 に近づく。したがって、

$$\begin{aligned} L_k &= \int_{I \cap (f^k)^{-1}(I)} \left| \frac{df^k}{dx}(x) \right| dx \\ &= \int_{I \cap (f^k)^{-1}(I)} |df^k(x)| \\ &\simeq \sum_{i=0}^{t_k} |f^k(x_{i+1}) - f^k(x_i)| \quad (k \gg 1) \end{aligned} \quad (11)$$

となり、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log L_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Var}(f^k) \quad (12)$$

が成り立つ。

(iii) $\text{Var}(f^k)$ と t_k の関係

全変動 $\text{Var}(f^k)$ と折返し点の個数 t_k の指数的大増度が等しいことについては、[15] を参照されたい。以上により、関係式 (4) が成り立つことが示された。

logistic 写像 (3) ($a = 3.9$) に対してアトラクタの複雑さを特徴づけるこれらの指標を計算した図 2 を見ると、いずれのパラメータにおいても、周期点の個数 P_k 、全変動 $\text{Var}(f^k)$ 、折返し点の個数 t_k は写像の反復回数が高くなってもその指数的大増率を見積もることができていることが分かる。それに対して、微分係数の空間積分 L_k については写像の反復回数 $k = 20$ 付近で写像の反復回数に対する指数的大増率が大幅に変化していることが分かる。この理由は、写像の反復回数 k が大きいほど $x = 0, 1$ 付近での $df^k(x)/dx$ の値が極端に大きくなるため、数値計算で L_k の値を求める際

に $x = 0, 1$ 付近での微分係数の最大値 $\max_{x \in I}(\lambda^{(k)}(x))$ の値が支配的であるからと考えられる．したがって，このような例では $k \geq 20$ において本来求めるべき L_k の指数的増大率を求めることができない．調べる空間の固有値の空間積分を数値計算で求める際には有限個の点の固有値の和で代替する必要があるが，この例のように極端に固有値の値が大きくなる点が存在する場合は，写像の微分係数の絶対値の空間積分（二次元以上では写像の Jacobi 行列の最大固有値の絶対値の空間積分）を用いるのは適切ではないことが分かる．

2.2 高次元写像 ($d \geq 2$)

前節で用いた折返し点を二次元以上の力学系に対して定義する．

[定義 1] C^1 級写像 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を考える．このとき，曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して， $Df^k(\gamma(t))\gamma'(t)$ の少なくとも一つの成分の正負が反転する点を， k 回写像により変換された曲線 $f^k(\gamma)$ の折返し点と定義する．以下，簡単のため折返し点と呼ぶ． □

位相的エントロピーの値を見積もるのに写像の反復回数が多数必要な力学系に対しては，前節で述べた理由により Jacobs らの方法が適用できない可能性がある．また，二次元以上の写像に対しては周期点の個数 P_k よりも写像による曲線の折返し点の個数 t_k を得る方が容易である．以上を踏まえ，本研究では t_k を用いて位相的エントロピーを見積もることにする．二次元以上の写像 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対しても，最終的には最大固有値の固有ベクトル方向に伸張されていくため一次的に扱えると考えられる．

3. 折返し点に着目した計算方法

前章での議論をもとに，写像による曲線の折返し点に着目した位相的エントロピーの計算方法を提案する．

(i) 初期曲線 γ の決定

初期曲線 γ の与え方について述べる．アトラクタの吸引領域にある点 x_{init} 及び適当なベクトル ξ_{init} に対して，あらかじめ決めておいた反復回数 k_1 回だけそれぞれ写像 f ，その Jacobi 行列 Df を作用させると， k_1 が十分大きければ $x_0 = f^{k_1}(x_{\text{init}})$ はアトラクタ上の点に，また， $\xi_0 = Df^{k_1}(x_{\text{init}})\xi_{\text{init}}/|Df^{k_1}(x_{\text{init}})\xi_{\text{init}}|$ は x_0 における最も不安定な方向の固有ベクトルにそれぞれ近づくと考えられる [8]． $\xi_{\text{init}} = (1, 0, \dots, 0)$ ，

$k_1 = 1000$ ととった．ここで， x_0 の周りで ξ_0 に沿った微小な長さ δ の直線を初期曲線 γ とする．なお，位相的エントロピーの計算結果が， x_{init} ， ξ_{init} ， k_1 ， δ にほとんど依存しないことを数値実験で確かめた．4. の計算例では， $\delta = 5.0 \times 10^{-3}$ とした．

(ii) 初期曲線 γ の近似

初期曲線 γ を次の N_0 個の点からなる集合 $S^{(0)}$ で近似する．

$$S^{(0)} = \{x_1^{(0)}, \dots, x_{N_0}^{(0)}\} \quad (13)$$

ここで，各点 $x_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, N_0$) は

$$x_i^{(0)} = x_0 + \frac{(2i - N_0 - 1)\delta}{N_0 - 1}\xi_0 \quad (14)$$

ととる．実際の計算では， $N_0 = 1000$ とした．

(iii) 折返し点の個数 t_1 の数え方

$S^{(0)}$ によって γ を近似したため， $f(S^{(0)})$ が $f(\gamma)$ の近似を与えると考えられる．したがって， $f(\gamma)$ の折返し点の個数を $f(S^{(0)})$ の折返し点の個数によって近似する．以下にその方法を記す．

$f(x_i^{(0)})$ と $f(x_{i+1}^{(0)})$ ($i = 1, \dots, N_0 - 1$) を線分で結んだものを $\text{Line}_i^{(1)}$ と表す．このとき， $\text{Line}_i^{(1)}$ と $\text{Line}_{i+1}^{(1)}$ の少なくとも一つの座標成分の符号が異なっているとき，折返し点が一つあると数える．各 Line_i に対してカウントした折返し点の数の合計を t_1 とする．

(iv) $f(S^{(0)})$ に対する点の補間

$\text{Line}_i^{(1)}$ ($i = 1, \dots, N_0$) の長さを $\ell_i^{(1)}$ とする．あらかじめ決めておいた長さ ϵ に対して $\ell_i^{(1)} > \epsilon$ となっていたら，点を補間する．あらかじめ決めておいた個数 n_{int} を用いて補間する点の個数は $\ell_i^{(1)} n_{\text{int}} / \epsilon$ とし， $f(x_i^{(0)})$ と $f(x_{i+1}^{(0)})$ の間に等間隔に置く． $f(S^{(0)})$ 及び補間した点の集合 $C^{(1)}$ を合わせた点の集合を $S^{(1)} = f(S^{(0)}) \cup C^{(1)}$ とする．実際の計算では，二次元の写像に対しては $\epsilon = 10^{-2}$ ，三次元の写像に対しては $\epsilon = 10^{-3}$ とし， $n_{\text{int}} = 100$ とした．

以降，反復回数 k に応じて上に示した手順を繰り返し，順次 t_k と $S^{(k)}$ を求めていく．この方法を「折返し点法」と呼ぶ．

4. 数値計算の例

4.1 折返し点法の適用

3. で述べた折返し点法をいくつかの写像に対して適用した結果を示す．ここでは，二次元の Ikeda 写

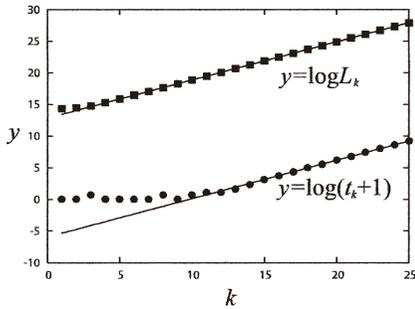


図 3 Ikeda 写像 (15) ($b = 0.9$) に対する t_k, L_k の計算結果. k : 写像の反復回数. \bullet : 折返し点法 $y = \log(t_k + 1)$. \blacksquare : Jacobs らの方法 $y = \log L_k$

Fig. 3 Computed results of t_k and L_k for the Ikeda map (15) ($b = 0.9$). k : number of iterates of map. \bullet : the turning point method $y = \log(t_k + 1)$. \blacksquare : the Jacobs method $y = \log L_k$.

像 [18], 三次元の Pickover 写像 [19], 四次元対称的结合非線形写像に適用した. なお, 比較のため Jacobs らの方法 [11] を用いた計算結果と, 過去の研究で位相的エントロピーが計算されたことのある写像に対しては, その値も併記する.

4.1.1 二次元 Ikeda 写像 [18]

二次元の Ikeda 写像 [18] に対して折返し点法を適用する. Ikeda 写像は次の式で表される.

$$\begin{cases} x_{\nu+1} = 1 + b(x_{\nu} \cos \theta_{\nu} - y_{\nu} \sin \theta_{\nu}) \\ y_{\nu+1} = b(x_{\nu} \sin \theta_{\nu} + y_{\nu} \cos \theta_{\nu}) \\ \theta_{\nu} = 0.4 - \frac{6}{1 + x_{\nu}^2 + y_{\nu}^2} \end{cases} \quad (15)$$

パラメータは $b = 0.9$ とした. この写像に対する, 折返し点法, Jacobs らの方法の適用結果を図 3 に示す. これより, 位相的エントロピーの値は, 折返し点法では 0.6065 ± 0.0021 , Jacobs らの方法では 0.6034 ± 0.0008 となった. なお, この写像に対して, Davidchack ら [16] が 0.602 , Galias ら [13] が 0.6033 , Hirata ら [14] が 0.6066 ± 0.0069 と位相的エントロピーの値を求めている.

4.1.2 三次元 Pickover 写像 [19]

次の式 (16) で表される三次元写像 [19] を考える. ここではこの写像のことを Pickover 写像と呼ぶことにする.

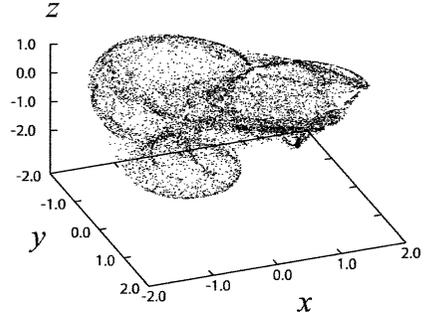


図 4 Pickover 写像 (16) アトラクタ
Fig. 4 Attractor of the Pickover map (16).

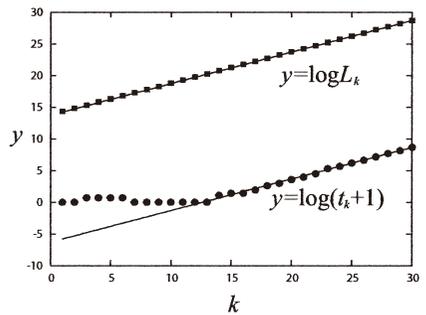


図 5 Pickover 写像 (16) に対する t_k, L_k の計算結果. k : 写像の反復回数. \bullet : 折返し点法 $y = \log(t_k + 1)$. \blacksquare : Jacobs らの方法 $y = \log L_k$

Fig. 5 Computed results of t_k and L_k for the Pickover map (16). k : number of iterates of map. \bullet : the turning point method $y = \log(t_k + 1)$. \blacksquare : the Jacobs method $y = \log L_k$.

この写像のアトラクタを図 4 に示す. この写像に対する折返し点法, Jacobs らの方法の適用結果を図 5 が得られた. これより, 位相的エントロピーの値は折返し点法では 0.4982 ± 0.0015 , Jacobs らの方法では 0.4983 ± 0.0003 となった.

4.1.3 四次元対称結合非線形写像

次の式 (17) で表される四次元対称結合非線形写像を考える.

$$\begin{cases} x_{\nu+1} = 2x_{\nu}^2 - 1.3x_{\nu} + 0.2(y_{\nu} + z_{\nu}) \\ y_{\nu+1} = 2y_{\nu}^2 - 1.3y_{\nu} + 0.2(z_{\nu} + w_{\nu}) \\ z_{\nu+1} = 2z_{\nu}^2 - 1.3z_{\nu} + 0.2(w_{\nu} + x_{\nu}) \\ w_{\nu+1} = 2w_{\nu}^2 - 1.3w_{\nu} + 0.2(x_{\nu} + y_{\nu}) \end{cases} \quad (17)$$

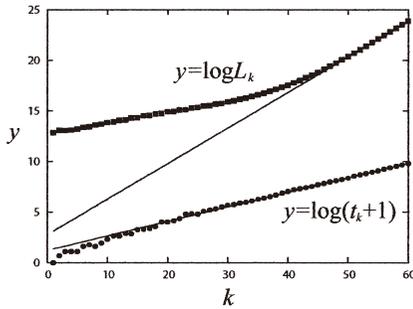


図 6 四次元対称結合非線形写像 (17) の t_k, L_k の計算結果. k : 写像の反復回数. \bullet : 折返し点法 $y = \log(t_k + 1)$. \circ : Jacobs らの方法 $y = \log L_k$.
 Fig. 6 Computed results of t_k and L_k for the 4-dimensional symmetric coupled nonlinear map (17). k : number of iterates of map. \bullet : the turning point method $y = \log(t_k + 1)$. \circ : the Jacobs method $y = \log L_k$.

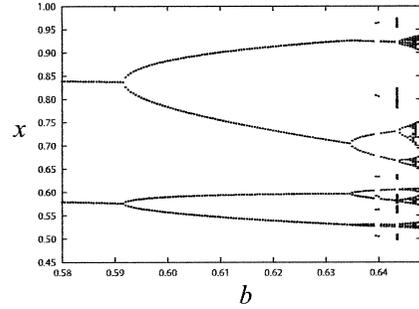
この写像に対して折返し点法を適用した結果を図 6 に示す. これより, 位相的エントロピーの値は折返し点法では 0.1433 ± 0.0015 , Jacobs らの方法では 0.1121 ± 0.0031 (写像の反復回数 $k = 23 \sim 33$), 0.3510 ± 0.0012 ($k = 50 \sim 60$) となった.

以上, 折返し点法を二, 三, 四次元の写像に対して適用したが, いずれの次元においても位相的エントロピーの値を見積もるのに十分な写像の反復回数まで折返し点の個数を見積もることができていることが分かる. 更に, 四次元対称結合非線形写像 (17) において, 写像の Jacobi 行列の最大絶対値の固有値の値が極端に大きくなる点が存在するため正確に L_k の値を見積もることができていないために Jacobs らの方法が適用できないのに対して, 折返し点法ではそのようなことは起きていないことが分かる.

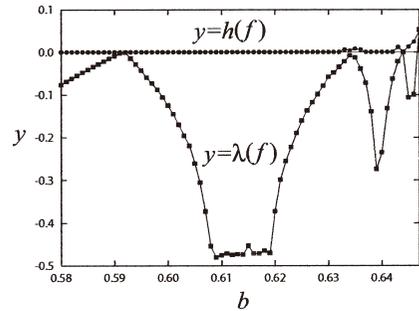
なお, 折返し点法を適用する際に初期曲線を近似する点の個数 N_0 を $N_0 = 500$ から 3000 まで値を 100 ずつ上げて位相的エントロピーの値を測定し, その平均値と標準偏差を求めたところ, Ikeda 写像 (15) では $h(f) = 0.6066 \pm 0.0010$, Pickover 写像 (16) では $h(f) = 0.4977 \pm 0.0017$, 四次元対称結合非線形写像 (17) では $h(f) = 0.1418 \pm 0.0003$ となった. したがって, これらの写像では, 位相的エントロピーの値の N_0 に対する依存性は大きくないと考えられる.

4.2 カオスの判定

カオス的な力学系は, 正の位相的エントロピーをもつものが多い [1], [20]. そこで, 折返し点法を用いて, Ikeda 写像 (15) の位相的エントロピーの値とカオスの



(a) 分岐図



(b) 位相的エントロピー $h(f)$ とリヤプノフ指数 $\lambda(f)$

図 7 Ikeda 写像 (15) の分岐図と位相的エントロピー. b : パラメータ. \bullet : 位相的エントロピー $y = h(f)$. \circ : リヤプノフ指数 $y = \lambda(f)$.

Fig. 7 Bifurcation diagram and topological entropy of the Ikeda map (15). b : parameter. \bullet : topological entropy $y = h(f)$. \circ : Lyapunov exponent $y = \lambda(f)$.

関係について調べた. 図 7 は分岐図と位相的エントロピーとリヤプノフ指数の計算結果を表す. 位相的エントロピー $h(f)$ の計算結果は, 周期解に対応するほとんどのパラメータ b の値に対して $h(f) < 10^{-5}$, カオスに対して正の値が得られた. したがって, $h(f) < 10^{-5}$ を $h(f) \simeq 0$ とみなすことにより, この場合はカオスの判定ができそうである. ただし, 分岐点付近, 特に $b = 0.635$ 付近では, 周期解であるにもかかわらず $h(f) \simeq 10^{-3}$ が得られた. この理由としては, 分岐点付近ではかなり多くの写像の反復回数を必要とし, 折返し点法で用いた点の距離が短くなっていくため計算誤差が生じることが考えられる.

この計算結果からも分かるように, カオスと位相的エントロピーの間には密接な関係がある. しかし, 位相的エントロピーだけでカオスを判定することには注意が必要である [20].

4.3 不安定方向が二つ以上ある場合

折返し点法は, 初期曲線 γ を与えたとき写像を反復

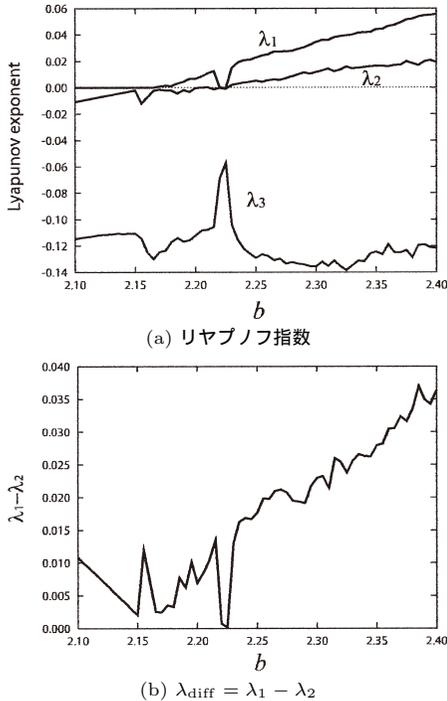


図 8 三次元 Kaneko 写像 (18) ($a = 0.4$) のリャプノフ指数 ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$), 及び $\lambda_{\text{diff}} = \lambda_1 - \lambda_2$
 Fig. 8 Lyapunov exponents ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) and $\lambda_{\text{diff}} = \lambda_1 - \lambda_2$ of the 3-dimensional Kaneko map (18) ($a = 0.4$).

するにつれ絶対値が最大の固有値の固有ベクトル方向に $f^k(\gamma)$ は伸張されていくため、一次的に扱えるという考えに基づいている。もし、写像の不安定方向が 2 方向以上ありそれらの固有値が互いに近い場合は、最も不安定な方向に伸張されていくまでに写像の反復回数が多数必要になり、収束性が劣化すると考えられる。ここでは、三次元 Kaneko 写像 [17]

$$\begin{cases} x_{\nu+1} = 0.4x_{\nu} + 0.6(1 - by_{\nu}^2) \\ y_{\nu+1} = z_{\nu} \\ z_{\nu+1} = x_{\nu} \end{cases} \quad (18)$$

を例にとる。 b はパラメータである。この写像のパラメータ b を変化させたときのリャプノフ指数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) 及び $\lambda_{\text{diff}} = \lambda_1 - \lambda_2$ の値をそれぞれ図 8 に示す。

この図より、 $b = 2.225, 2.3, 2.4$ の三つの値のとき、折返し点法の有効性を確かめることにした。それぞれのパラメータでの λ_{diff} の値は、 $b = 2.225$ のとき $\lambda_{\text{diff}} = 0.000141$, $b = 2.3$ のとき $\lambda_{\text{diff}} = 0.022914$,

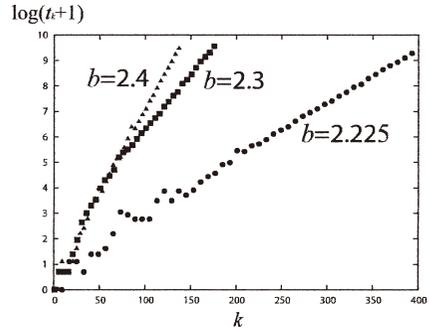


図 9 三次元 Kaneko 写像 (18) の $\lambda_{\text{diff}} = \lambda_1 - \lambda_2$ と単調な区間の個数 ($t_k + 1$) の関係。 k : 写像の反復回数。
 $b = 2.225, \lambda_{\text{diff}} = 0.000141$. $b = 2.3, \lambda_{\text{diff}} = 0.022914$. $b = 2.4, \lambda_{\text{diff}} = 0.036368$
 Fig. 9 Relationship between $\lambda_{\text{diff}} = \lambda_1 - \lambda_2$ and number of monotone intervals ($t_k + 1$) of the 3-dimensional Kaneko map (18). k : number of iterates of map. $b = 2.225, \lambda_{\text{diff}} = 0.000141$. $b = 2.3, \lambda_{\text{diff}} = 0.022914$. $b = 2.4, \lambda_{\text{diff}} = 0.036368$.

$b = 2.4$ のとき $\lambda_{\text{diff}} = 0.036368$ である。折返し点法を適用した結果、図 9 が得られた。この図によると、確かに λ_{diff} の値が大きいほど折返し点の個数 t_k がほぼ一定の指数的大増率になるまでに多くの写像の反復回数が必要となることが分かる。

5. む す び

本研究では、写像 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して位相的エントロピーを求めるための簡便で高次元にも適用可能な計算手法について考えた。アトラクタを特徴づける指標として写像により変換された曲線の折返し点の個数に着目し、位相的エントロピーを求める計算法（折返し点法）を提案した。アトラクタを特徴づける指標として、周期点の個数 P_k , Jacobi 行列の最大固有値の空間積分 L_k , 全変動 $\text{Var}(f^k)$, 単調な区間の個数 ($t_k + 1$) に着目し、logistic 写像 (3) を例にとり、それぞれの指数的大増率を見積もった。その結果、周期点、全変動、単調な区間の個数については位相的エントロピーを見積もるのに十分な写像の反復回数までほぼ同じ指数的大増率を示したが、Jacobi 行列の最大固有値の空間積分については写像の反復回数がある程度以上になるとこの指数的大増率から外れていった。この理由は、Jacobi 行列の最大固有値が極端に大きくなる点があったため、数値計算により空間積分を求める際にその点の寄与が過大に見積もられたためである。このことと、高次元写像においては周期点の個数を見積もることは難しいのに対して折返し点の個数は比較的求

めやすいことを踏まえて、本研究ではアトラクタの折返し点の個数に着目して位相的エントロピーを求める計算法（折返し点法）を提案することにした。

折返し点法を Ikeda 写像 (15), Pickover 写像 (16), 対称的結合非線形写像 (17) に対して適用した結果, いずれの次元でも位相的エントロピーを見積もるのに十分な写像の反復回数まで折返し点の個数を数えられていることが分かった。また, 従来の方法では問題が生じる写像に対しても折返し点の数を求めることができた。

次に, 折返し点法を用いてカオスの判定を行った結果, おおむね判定できていると思われるものの定常解で周期解となるパラメータにおいて位相的エントロピーの値が正となる場合があるなど, カオスの判定が行えていない場合があることが分かった。

最後に, 写像の不安定方向が二つ以上ある場合, それらのリャブノフ指数の値が近いほど折返し点法を用いたときの位相的エントロピーの収束性が劣化することを三次元 Kaneko 写像 (18) に対して確かめた。

今後は, 折返し点法の高次元写像への適用可能性を考えるとともに, 理論的根拠を更に探求していきたい。

文 献

- [1] C. Robinson, Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, 2nd ed., CRC, 1998.
- [2] R.L. Adler, A.C. Konheim, and H. McAndrew, "Topological entropy," Trans. Am. Math. Soc., vol.114, pp.309-319, 1965.
- [3] R. Bowen, "Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces," Trans. Am. Math. Soc., vol.153, pp.401-414, 1971.
- [4] P. Collet, J.P. Crutchfield, and J.-P. Eckmann, "Computing the topological entropy of maps," Commun. Math. Phys., vol.88, pp.257-262, 1983.
- [5] L. Block, J. Keesling, S. Li, and K. Peterson, "An improved algorithm for computing topological entropy," J. Stat. Phys., vol.55, pp.929-939, 1989.
- [6] O. Biham and W. Wenzel, "Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers," Phys. Rev. Lett., vol.63, pp.819-822, 1989.
- [7] Q. Chen, E. Ott, and L.P. Hurd, "Calculating topological entropies of chaotic dynamical systems," Phys. Lett. A, vol.156, pp.48-52, 1991.
- [8] S. Newhouse and T. Pignataro, "On the estimation of topological entropy," J. Stat. Phys., vol.72, pp.1331-1351, 1993.
- [9] N.J. Balmforth, E.A. Spiegel, and C. Tresser, "Topological entropy of one-dimensional maps approximations and bounds," Phys. Rev. Lett., vol.72, pp.80-83, 1994.

- [10] S.L. Baldwin and E.E. Slaminka, "Calculating topological entropy," J. Stat. Phys., vol.89, pp.1017-1033, 1997.
- [11] J. Jacobs, E. Ott, and B.R. Hunt, "Calculating topological entropy for transient chaos with an application to communicating with chaos," Phys. Rev. E, vol.57, pp.6577-6588, 1998.
- [12] G. Froyland, O. Junge, and G. Ochs, "Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition," Physica D, vol.154, pp.68-84, 2001.
- [13] Z. Galias, "Rigorous investigation of the Ikeda map by means of interval arithmetic," Nonlinearity, vol.15, pp.1759-1779, 2002.
- [14] Y. Hirata and A.I. Mees, "Estimating topological entropy via a symbolic data compression technique," Phys. Rev. E, vol.67, 026205, 2003.
- [15] M. Misiurewicz and W. Szlenk, "Entropy of piecewise monotone mappings," Studia Math., vol.67, pp.45-63, 1980.
- [16] R.L. Davidchack, Y-C. Lai, E.M. Bollt, and M. Dhamala, "Estimating generating partitions of chaotic systems by unstable periodic orbits," Phys. Rev. E, vol.61, pp.1353-1356, 2000.
- [17] K. Kaneko, "Doubling of Torus," Prog. Theor. Phys., vol.69, pp.1806-1810, 1983.
- [18] K. Ikeda, "Multi-valued stationary state and its instability of th transmitted light by a ring cavity system," Opt. Commun., vol.30, pp.257-261, 1979.
- [19] C.A. Pickover, "A note on rendering 3-D strange-attractors," Comput. Graph., vol.12, pp.263-267, 1988.
- [20] 國府寛司, 力学系の基礎, 朝倉書店, 2000.

(平成 19 年 1 月 31 日受付, 5 月 18 日再受付, 8 月 17 日最終原稿受付)



福島真太郎

2004 東大・理・物理卒。2006 同大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻修士課程了。現在, (株) 富士通総研に所属。



村重 淳 (正員)

1986 東大・工・資源開発卒業。1988 同大学院工学研究科資源開発工学専攻修士課程了。1991 同大学院工学研究科船舶海洋工学専攻博士課程了。工博。1991 カリフォルニア工科大学リサーチアソシエイト。1995 運輸省船舶技術研究所入所。1998 同大学院工学研究科計数工学専攻助教。1999 同大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻助教。2007 公立はこたて未来大学システム情報学部複雑系科学科教授。