

平成 28 年度 公立はこだて未来大学卒業論文

K-model の拡張とその分岐構造解析
非線形システムを用いた映像表現の提案

伊藤 壮大

複雑系知能学科 1013192

指導教員 香取 勇一

提出日 平成 29 年 1 月 31 日

**Extension of K-model and Analysis of Its
Bifurcation Structure**
**Proposal of Representation Movie of with
Non-linear Dynamical Systems**

by

Takehiro Itoh

BA Thesis at Future University Hakodate, 2017

Advisor: Yuichi Katori

Department of Complex Media Architect
Future University Hakodate
January 31, 2017

Abstract

In the present study, we analyze bifurcation structure of mathematical models of non-linear dynamical systems and address to express the bifurcation structure as a movie. Recently mathematical models of non-linear systems were utilized as a representation technique for generative art. Complex bifurcation structure and behavior of the dynamical system can be visualized. In the present study, we analyzed bifurcation structure of the K-model proposed by Keiko Kimoto. Then, we extend this model with Hermite polynomials and analyzed bifurcation structure of the extended model. Furthermore, we address to make a movie representation of the bifurcation structure.

Keywords: Non-linear systems, Bifurcation structure, Movie

概要:

本研究では、非線形システムの数理モデルを用いて分岐構造解析を行い、その分岐現象を基にした映像表現を行った。現在、非線形システムの数理モデルを解析し、それを映像として表現するジェネラティブ・アートが存在する。非線形システムの分岐構造を映像という形で表現することで数理モデルの「動き」を可視化している。本研究では木本圭子の論文にある K-model という非線形システムの数理モデルの分岐構造を解析した。さらにモデルを拡張してエルミート多項式を加えた新たな数理モデルを提案し、その分岐構造を解析し、その分岐構造をより良く理解するための映像表現を試みた。

キーワード: 非線形システム, 分岐構造, 映像

目次

第 1 章	序論	1
1.1	背景	1
1.2	研究目標	1
第 2 章	関連研究	2
2.1	木本の K-model	2
2.1.1	K-model の特性と構成	2
2.1.2	サイン波を加えた K-model	4
第 3 章	手法提案	5
3.1	エルミート多項式	5
3.2	新たな非線形ダイナミクスの数理モデルの提案	7
第 4 章	解析結果	8
4.1	$H_0(x)$ を加えたときの K-model の構造	9
4.2	$H_1(x)$ を加えたときの K-model の構造	13
4.3	$H_2(x)$ を加えたときの K-model の構造	17
4.4	$H_3(x)$ を加えたときの K-model の構造	21
4.5	$H_4(x)$ を加えたときの K-model の構造	25
第 5 章	映像表現への制作過程	29
第 6 章	考察	30
第 7 章	結言	31
7.1	まとめ	31
7.2	今後の展望	31
付録 A	K-model を応用した 非線形ダイナミクスの数理モデル	34
付録 B	2 パラメータ分岐図	39

第1章 序論

本章において, 本研究の背景とそれに基づく関連研究について記述する.

1.1 背景

非線形システムの構造は複雑である. ある力学系のモデルを扱うとき, パラメータを変化させたときの振る舞いに変化する現象を分岐現象といい, この分岐現象には周期倍分岐, サドル・ノード分岐, トランスクリティカル分岐と様々な分岐現象がある [1]. 非線形システムは予測不可能性を持つためその現象を解析的に解くことは不可能とされている. 非線形システムの現象を理解するには, 分岐現象からなる分岐構造を解析することでその現象を理解できるのではと考えた. 木本圭子が 2009 年に考案した K-model に着目した. この非線形システムの数理モデルにエルミート多項式を加えた数理モデルを提案した. 本研究では, 新たに提案した非線形システムの数理モデルの分岐構造解析を行い, その構造をアニメーションとして映像表現を試みる.

1.2 研究目標

非線形システムの分岐構造解析を行い, その分岐現象を映像表現によってより理解しやすくすることを本研究の目的とする. 非線形システムの分岐構造解析と映像表現することにより, 非線形システムの現象の理解促進が見込める. 本研究では m 次のエルミート多項式を加えることで, K-model の持つ分岐構造とは別の分岐構造が見られると推測する. この非線形システムの数理モデルを拡張し, 本研究の目標達成を試みる.

第2章 関連研究

2.1 木本の K-model

K-model とは 2009 年に木本圭子が考案した非線形システムの数理モデルである。本研究ではこのモデルを拡張したモデルを用いて研究を進める。ここでは K-model の特性を述べる。

2.1.1 K-model の特性と構成

K-model とは平行移動と回転を特徴に持つ非線形システムの数理モデルである。 x_0 と y_0 に適当な初期値を与え、半径 r_0 を算出。それを x_{n+1} , y_{n+1} の式に代入、更新していく。パラメータ回転角 θ によって回転し、 x と y の値が更新されていく [2]. K-model の式は以下になる。

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta) / r_n^2 \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta) / r_n^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

極座標の式は以下になる。

$$\begin{cases} r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ \phi_n = \arctan\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

K-model の分岐構造と xy 平面での状態空間におけるアトラクタを再現した (図 2.1). 非線形分岐構造が見られた。パラメータ θ を 0.08π から徐々に増加していくと、 0.12547π 付近では、6 周期の構造が見られた。 0.13π では、カオス解が見られた。 0.165π では 3 周期の構造が見られた。 0.1796π では 5 周期の構造である。 0.195π では 3 周期の構造であるが、カオス解が生じている。 0.22π では 4 点を取る構造が見られた。K-model の分岐構造では 2 周期, 4 周期, 8 周期, カオス解と 2^n 周期倍分岐が見られた。

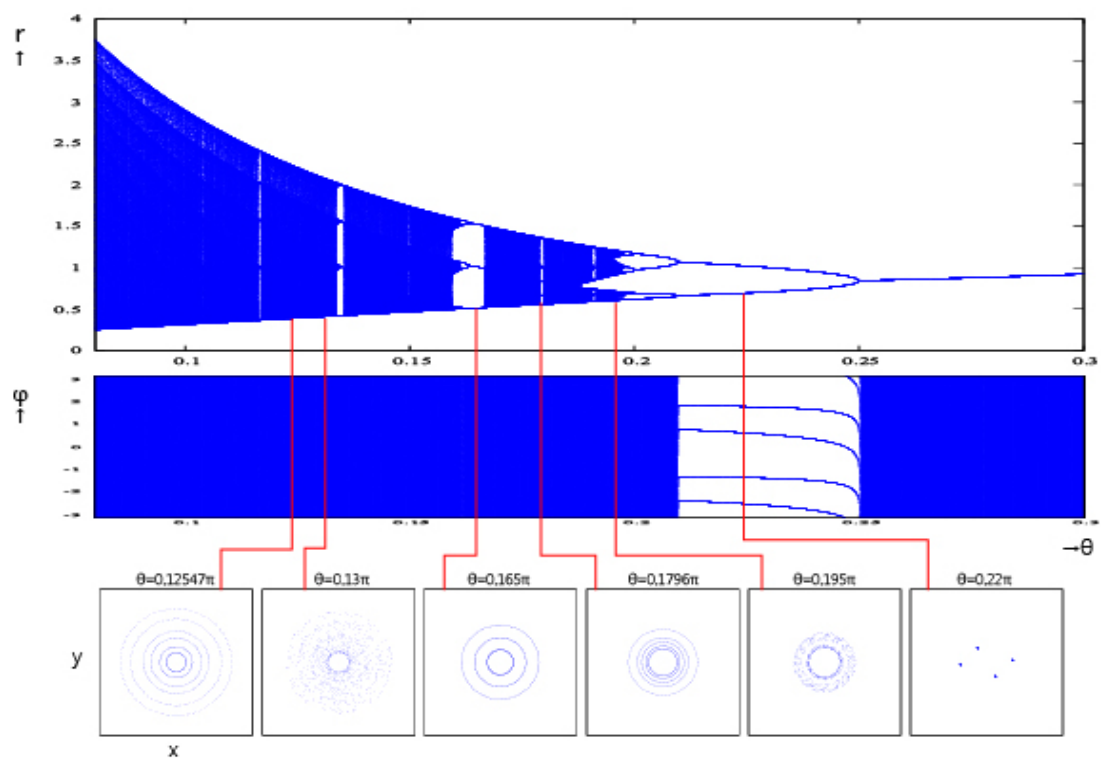


図 2.1: K-model の分岐図と状態空間におけるアトラクタの再現

2.1.2 サイン波を加えた K-model

木本が K-model の安定状態を外力によって乱すことにより複雑な動きが生じると考えた数理モデルである。「動き」を表現するために時間軸を持つパラメータを加えた数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + a \sin(\omega n) \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

$a \sin(\omega n)$ は, サイン波を表し, パラメータ a は振幅, ω は周波数, n は時刻を表す. サイン波を加えることにより, $\sin(\omega n)$ 分振動する特徴を持つ. 図 2.2 は $0 \leq n < 300$, $a = 0.25$, $\theta = 0.165\pi$, $\omega = 0.0314$ としたときのサイン波を加えた K-model の状態空間におけるアトラクタである. 左上から右下へ時刻 n における移り変わりを示している [2][3][4].

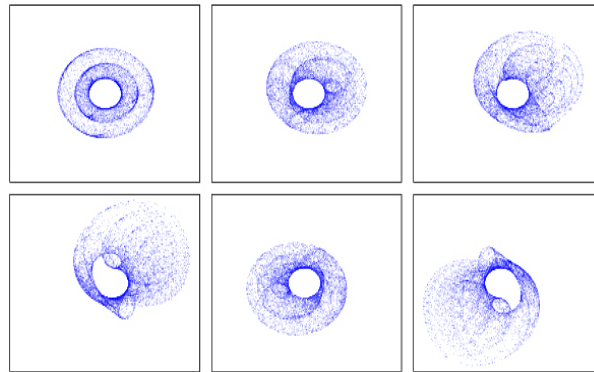


図 2.2: サイン波を加えた K-model の状態空間におけるアトラクタの再現

第3章 手法提案

3.1 エルミート多項式

エルミート多項式とは, 常微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2m \right) H_m(x) = 0 \quad (3.1)$$

を, 満たす多項式 $H_m(x)$ のことを言い, 重み関数 e^{-x^2} を用いる [4]. $H_m(x)$ は以下の2つの式で求まる.

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} \quad (3.2)$$

$$H_{m+2}(x) = 2xH_{m+1}(x) - 2(m+1)H_m(x) \quad (3.3)$$

$m = 0, 1, 2, 3, 4$ としたとき $H_m(x)$ は以下となる.

$$H_0(x) = 1 \quad (3.4)$$

$$H_1(x) = 2x \quad (3.5)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (3.6)$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \quad (3.7)$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad (3.8)$$

エルミート多項式 $H_m(x)$ は, 量子力学のシュレディンガーの方程式でよく用いられる調和振動子の一般解を表すもので, 波動関数の一種である. また次元によって求まる一般解が異なり, m が偶数ならば偶関数, 奇数ならば奇関数を特徴に持つ数理モデルである (図 3.1)[5]. このエルミート多項式 $H_m(x)$ を用いることで, K-model の構造や動きに変化をもたらすのではないかと考えた.

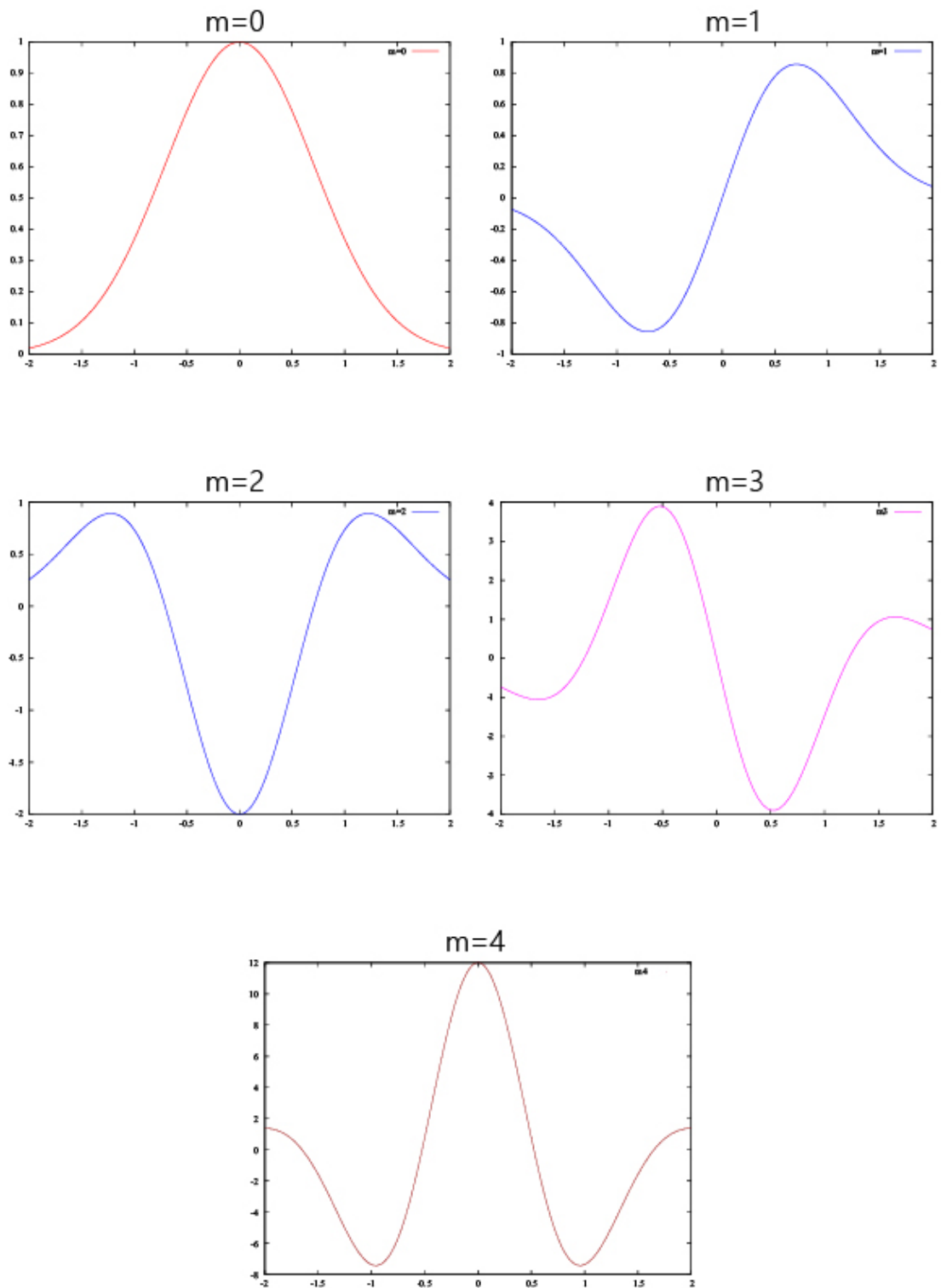


図 3.1: m 次における $H_m(x)$ のグラフ

3.2 新たな非線形ダイナミクスの数理モデルの提案

ここでは,新たに非線形ダイナミクスの数理モデルを提案する.本研究において,K-modelを応用し,K-modelにサイン波 $a \sin(\omega n)$ の代わりにエルミート多項式 $H_m(x)$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$)を加えた数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + aH_m(x)e^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

a はパラメータ, $e^{-x_n^2}$ は重み関数であり,数値計算する上で発散をしないよう制限をかけている.本研究では,エルミート多項式 $H_m(x)$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$)と,「動き」を映像表現するためパラメータ a を加えたときの構造の解析とエルミート多項式 $H_m(x)$ を加えた非線形システムの数理モデルの xy 平面での状態空間におけるアトラクタをアニメーションで映像表現として試みる.

第4章 解析結果

この章では、提案した非線形ダイナミクスの数理モデルの解析結果を説明する。 $H_m(x)$ のパラメータ a と回転角 θ の2パラメータ分岐図から、 $r - a$ 分岐図と $\phi - a$ 分岐図、それに対応した xy 平面での状態空間におけるアトラクタ、 $r - \theta$ 分岐図と $\phi - \theta$ 分岐図それぞれに対応した xy 平面での状態空間におけるアトラクタから、応用した非線形数理モデルの解析を行っていく。

2パラメータ分岐図は、横軸が回転角 θ と縦軸パラメータ a とする。回転角 θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ とし、パラメータ a の範囲を $0 \leq a \leq 2$ とした。これにより周期解、非周期解、カオス解の判別が可能である。白は発散、黒 (A) はカオス、赤 (B) は1周期、黄 (C) は2周期、濃黄 (D) は3周期、緑 (E) は4周期、青 (F) は5周期、ネイビー (G) は6周期、シアン (H) は7周期、紫 (I) は8周期、桃 (J) は9周期、橙 (K) は10周期を表す。それ以外は周期に対応した色を指定している [6][7][8]。なお、2パラメータ分岐図の周期の判別は半径 r を基準とする。理由としては、 xy 平面での状態空間におけるアトラクタを観測したとき、アトラクタの構造のほとんどにカオスが見られほかにも同じような構造が見られたため周期を判別しにくいと判断し、 xy 平面での状態空間におけるアトラクタの構造がわかりやすくなると考えたためである。

4.1 $H_0(x)$ を加えたときの K-model の構造

K-model に $H_0(x)$ を加えたときの数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + ae^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

$m = 0$ における 2 パラメータ分岐図では, 広い範囲でカオス解が見られた (図 4.1). その中で $0 \leq \theta \leq 0.43\pi, 0 \leq a \leq 1$ の範囲において, 分岐構造が見られたため, ここを拡大して解析する. 拡大した分岐図の範囲ではカオス解の中に, 2 周期または 3 周期の点の集まりの中に 8 周期と 6 周期を取る構造が見られた. そこで, $0 \leq a \leq 1$ の範囲において, θ を $\theta = 0.225\pi$ として固定したときの 1 パラメータ分岐図 ($r - a$ 分岐図, $\phi - a$ 分岐図) と状態空間におけるアトラクタおよび $0 \leq \theta \leq 0.40\pi$ の範囲でパラメータ a を $a = 0.40$ と固定したときの 1 パラメータ分岐図 ($r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図) と状態空間におけるアトラクタである (図 4.2).

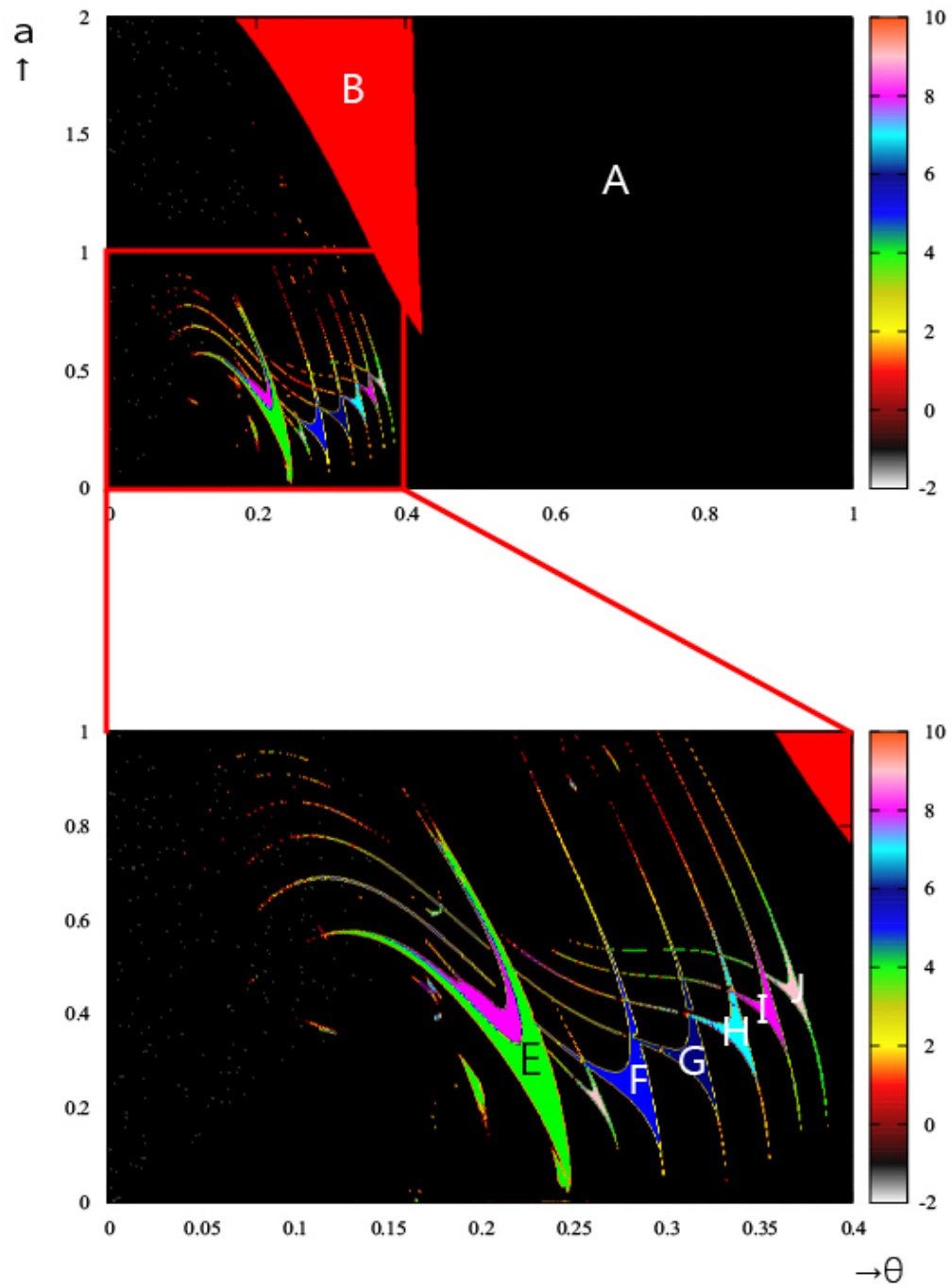


図 4.1: $m = 0$ での 2 次元分岐図

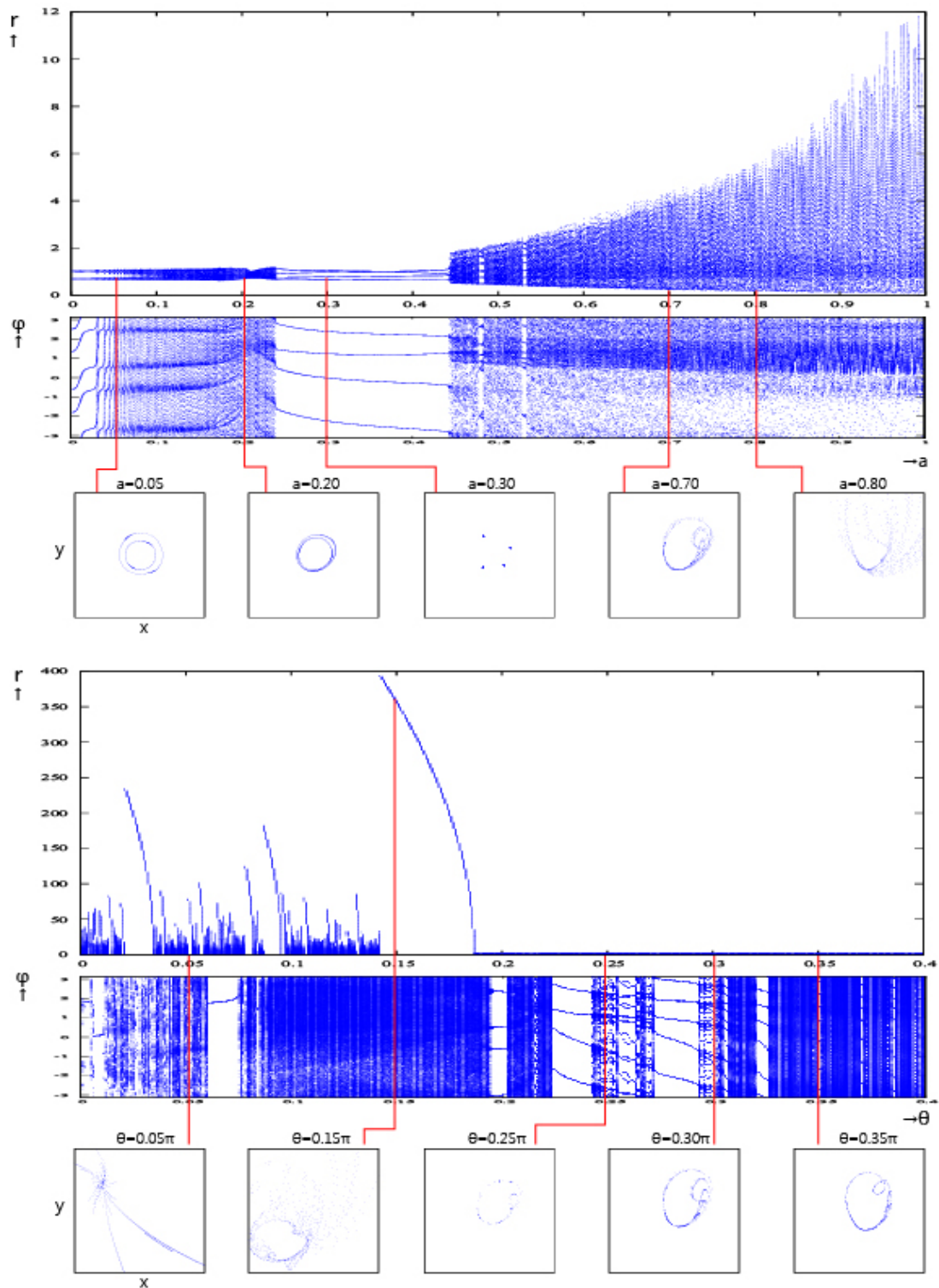


図 4.2: $m = 0$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ

$0 \leq a \leq 0.05$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, 1 周期から 2 周期の分岐構造が繰り返し見られた. それが a の値が増加するにつれて半径 r の取る範囲も広がっている. $\phi - a$ 分岐図を見ると, 2 点から 4 点を取る構造が繰り返し見られた. この 2 つから半径 r の取る点が 1 点から 2 点のため偏角 ϕ の取る点が 2 点から 4 点となり, それに対応したアトラクタが見られた. $0.25 \leq a \leq 0.45$ の範囲において, 半径 r では, 4 点を取る構造が見られた. 偏角 ϕ でも同様に 4 点を取る構造が見られた. $a \geq 0.30$ 以降は半径 r と偏角 ϕ がカオス解を生じている.

次に $r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る. $r - \theta$ 分岐図からわかるように, $0 \leq \theta \leq 0.15\pi$ までの範囲では半径 r の取る値が大きい. それに伴い $\phi - \theta$ 分岐図ではカオス解が生じた. この範囲におけるアトラクタも半径 r が大きく広がるような構造である. $0.195\pi \leq \theta \leq 0.4\pi$ の範囲において分岐構造が見られた. まず, $\theta = 0.20\pi$ 付近では, 5 周期から 10 周期を取る点が見られた. ここでは 5×2^n 周期が微々見られた. これに対応した $\phi - \theta$ 分岐図では, 4 点を取る構造が見られた. $\theta = 0.25\pi$ 付近では, 半径 r の取る点がカオス解を生じており, 偏角 ϕ は 1 周期から 2 周期から 1 周期という分岐構造が見られている. つまり, 偏角 1 つの中の半径 r の取る値が数多あることがわかる. $\theta \geq 0.30\pi$ 以降は半径 r は 8 周期から 16 周期からカオス解, 9 周期から 18 周期からカオス解, 10 周期から 20 周期からカオス解と周期倍分岐が見られた.

4.2 $H_1(x)$ を加えたときの K-model の構造

K-model に $H_1(x)$ を加えたときの数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + (2x_n)ae^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

$m = 1$ における 2 パラメータ分岐図では, 広い範囲でカオス解が見られた. その中で $0.195\pi \leq \theta \leq 0.40\pi, 0 \leq a \leq 1$ の範囲において, 分岐構造が見られたため, ここを拡大して解析する (図 4.3). この分岐図ではカオス解の中に, 2 周期, 3 周期, 4 周期, 6 周期, 8 周期と様々な周期が見られた. 回転角 θ とパラメータ a のある値において取る値が数多あると考えられる. そこで, $0 \leq a \leq 1$ の範囲において, θ を $\theta = 0.27\pi$ として固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r-a$ 分岐図, $\phi-a$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタおよび $0.195\pi \leq \theta \leq 0.40\pi$ の範囲でパラメータ a を $a = 0.35$ と固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r-\theta$ 分岐図, $\phi-\theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る (図 4.4).

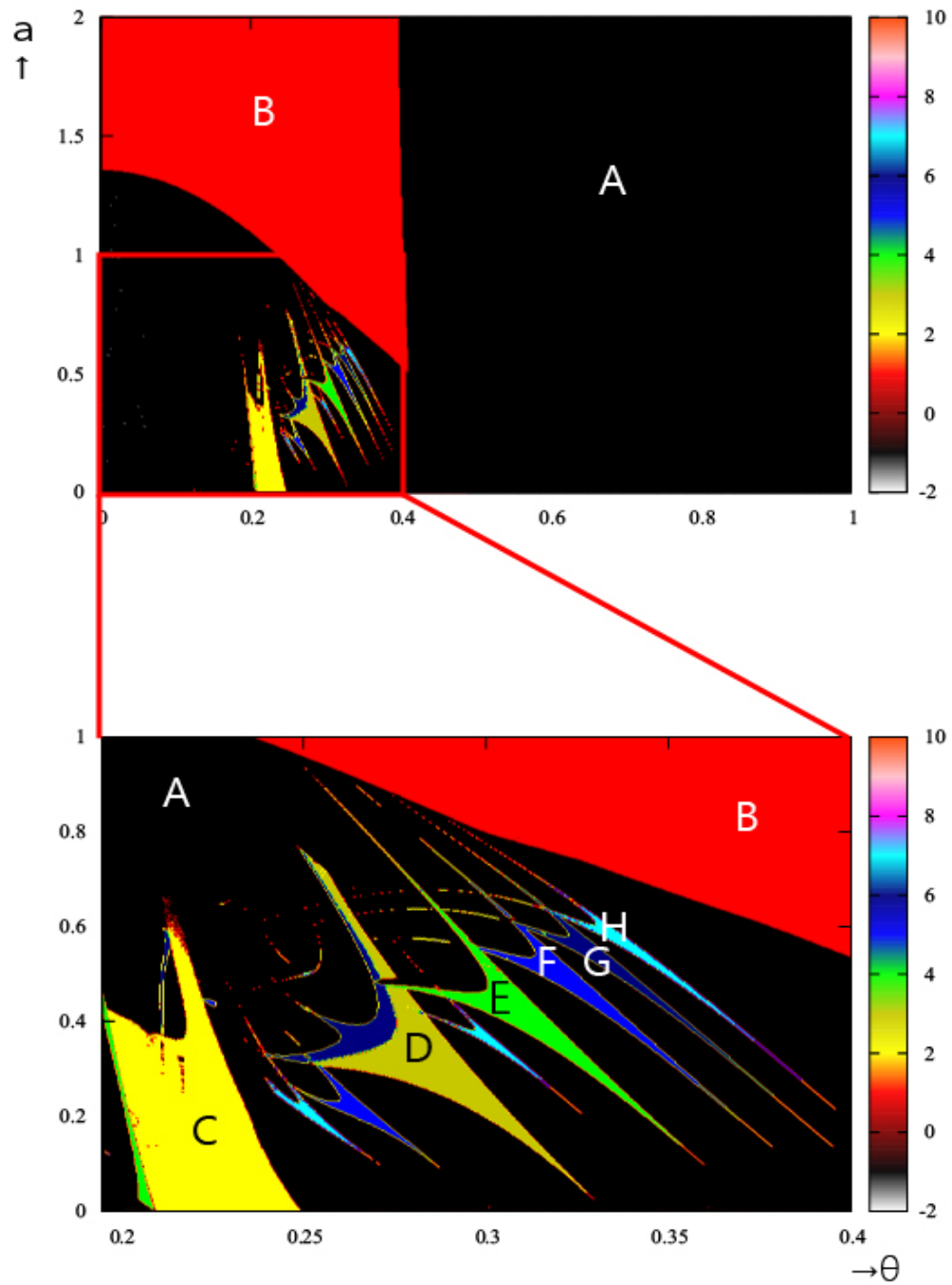


図 4.3: $m = 1$ での 2 次元分岐図

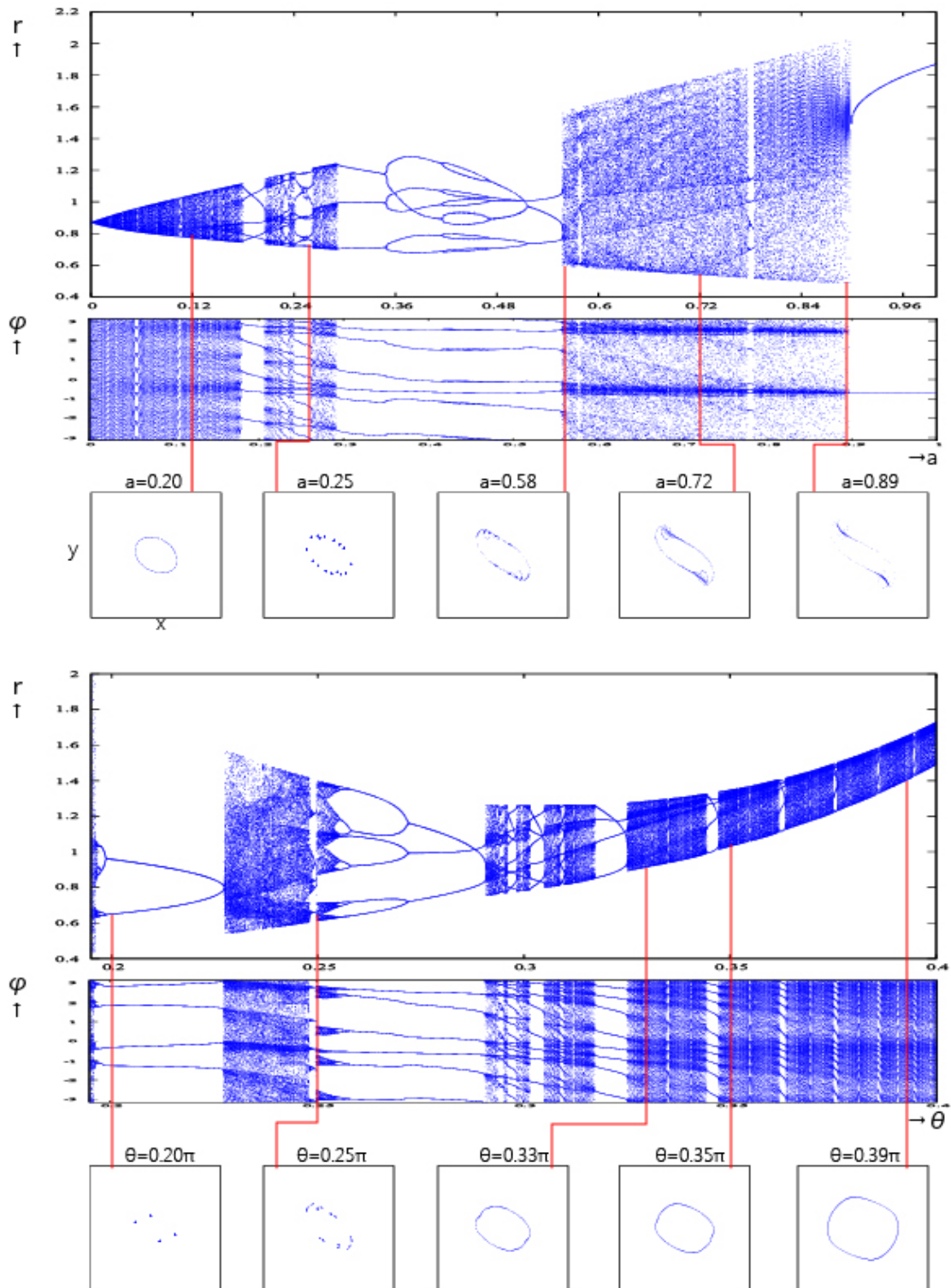


図 4.4: $m = 1$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ

$0 \leq a \leq 0.12$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, 半径 r はカオス解が生じており, それに伴った偏角 ϕ も同様にカオス解が生じている. $0.12 \leq a \leq 0.24$ では, 分岐構造が見られた. $0.18 \leq a \leq 0.20$ では, 5 点の周期が見られ, また $a = 0.22$ 付近では, 18 点の周期が見られ, また, $a = 0.24$ 付近では, 13 周期と不規則な周期倍分岐が見られた. なお, その範囲外はカオス解が生じている. 半径 r の取る範囲も広がっている. それと対応して $\phi - a$ 分岐図を見ると, 2 点から 4 点を取る構造が繰り返し見られた. この 2 つから半径 r の取る点が 2 点のため偏角 ϕ の取る点が 4 点となるアトラクタである. $a = 0.3$ 付近ではカオス解が生じた. $r - a$ 分岐図を見ると, 偏角 ϕ もカオス解が生じたため値を多くとる. ただし $a = 0.40$ 周辺では 3 周期から 6 周期から 12 周期からカオス解と 3×2^n 周期倍分岐が見られた後, 12 周期から 6 周期から 3 周期が見られた. $0.40 \geq a$ 以降はカオス解が生じており, $a \geq 0.85$ 以降はある値に収束している.

次に $r - \theta$ 分岐図, $r - \phi$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る. $r - \theta$ 分岐図からわかるように, $\theta = 0.20\pi$ 付近では 2 点を取る. それに伴い $\phi - \theta$ 分岐図では 4 点である. $0.25\pi \leq \theta \leq 0.30\pi$ の範囲では 12 周期から 6 周期から 3 周期からと 3×2^n 周期倍分岐が見られた. $0.30\pi \leq \theta$ 以降は所々で分岐構造が見られた. $\theta = 0.305\pi$ 付近では 7 周期の点, $\theta = 0.32\pi$ 付近では 4 周期の点, $\theta = 0.35\pi$ 付近では 5 周期の点とる構造が見られた.

4.3 $H_2(x)$ を加えたときの K-model の構造

K-model に $H_2(x)$ を加えたときの数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + (4x_n^2 - 2)ae^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

$m = 2$ における 2 パラメータ分岐図では, 広い範囲でカオス解が見られた. その中で $0 \leq \theta \leq 0.43\pi, 0 \leq a \leq 0.8$ の範囲において, 分岐構造が見られたため, ここを拡大して解析する (図 4.5). この分岐図ではカオス解の中に, 2 周期または 3 周期の点の集まりの中に 8 周期と 6 周期が稠密に点を取る構造が見られた. これが部分的に見られたことから半径 r とパラメータ a のある値において取る値が稠密していると考えられる. そこで, $0 \leq a \leq 0.8$ の範囲において, θ を $\theta = 0.35\pi$ として固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r - a$ 分岐図, $\phi - a$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタおよび $0 \leq \theta \leq 0.43\pi$ の範囲でパラメータ a を $a = 0.20$ と固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る (図 4.6).

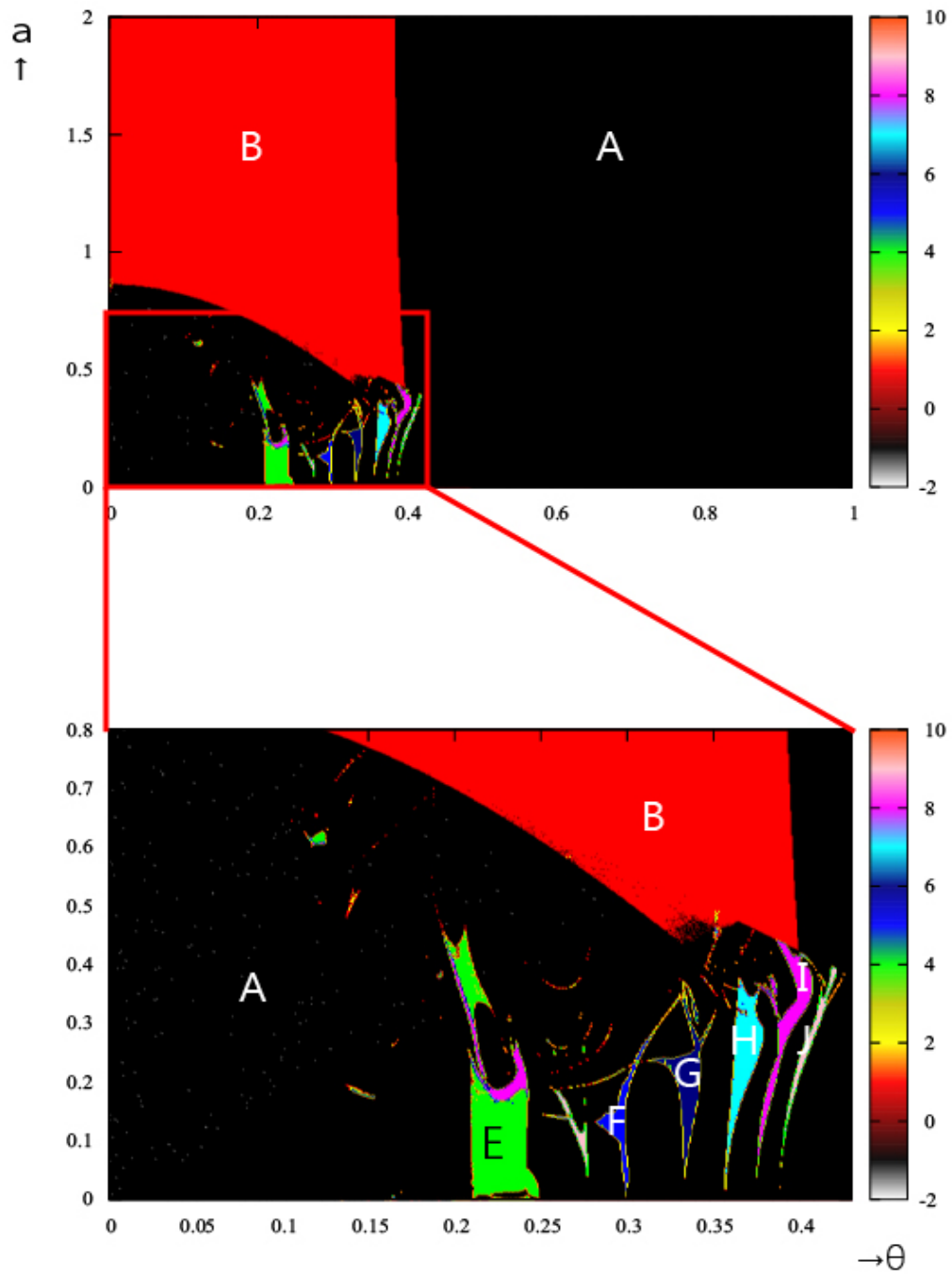


図 4.5: $m = 2$ での 2 次元分岐図

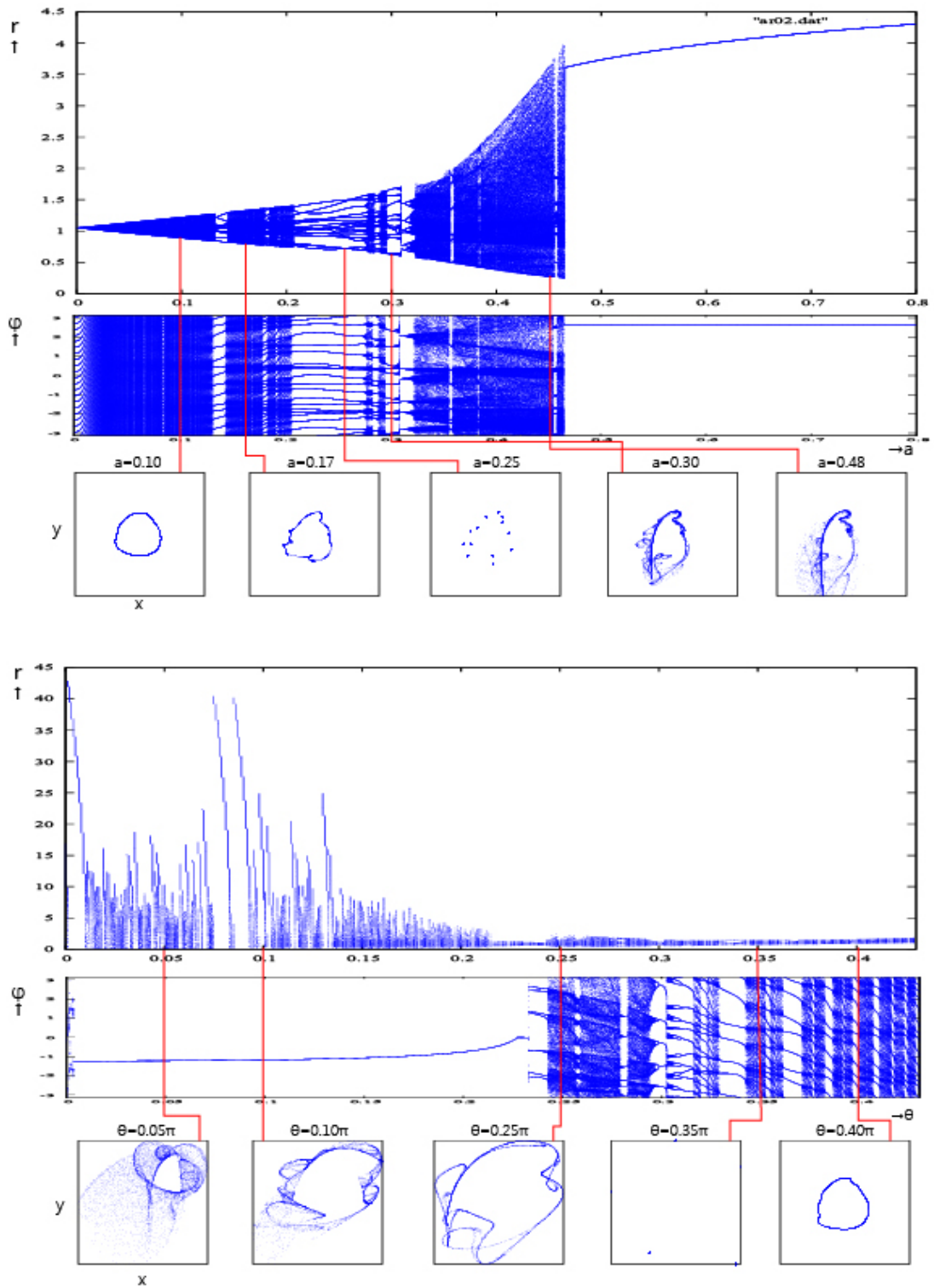


図 4.6: $m = 2$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ

$0 \leq a \leq 0.10$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, カオス解が生じている. これは a の値が増加するにつれて半径 r の取る範囲も広がっている. それと対応して $\phi - a$ 分岐図を見ると, こちらもカオス解が生じている. この2つから半径 r の取る点が多いため偏角 ϕ の取る点も多い. そのため xy 平面での状態空間におけるアトラクタは, $a = 0.10$ において, 1 周期の円形アトラクタに見えるのはそのためである. $0.13 \leq a \leq 0.145$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, 分岐構造が見られた. 13 点を取る周期が見られた. その前後ではカオス解が生じている. $0.23 \leq a \leq 0.30$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, 周期倍分岐が見られた. $0.23 \leq a \leq 0.28$ 付近では, 20 周期から 40 周期からカオス解と 20×2^n 周期倍分岐が見られた. $0.285 \leq a \leq 0.29$ 付近では 18 周期から 36 周期からカオス解とこちらも 18×2^n が見られた. $0.295 \leq a \leq 0.32$ の範囲でも分岐構造が見られた. 13 周期から 26 周期と 13×2^n 周期倍分岐が見られ, $a = 0.31$ 周辺では 6 周期から 12 周期から 24 周期と, 6×2^n 周期倍分岐が見られた. それ以降はカオス解が生じている. $a \geq 0.45$ 以降はカオス解が生じた後, 発散するような構造が見られた.

次に $r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る. $r - \theta$ 分岐図からわかるように, $0.20\pi \leq \theta \leq 0.43\pi$ までの範囲で様々な分岐構造が見られた. $0.21 \leq a \leq 0.24$ 付近では 4 周期から 8 周期の 4×2^n 周期倍分岐が見られた後カオス解が生じた. $a = 0.30$ 付近で 24 周期から 12 周期から 6 周期と 6×2^n 周期倍分岐が見られた. その後, $a = 0.29$ 付近までカオス解が生じた後, $0.295 \leq a \leq 0.31$ 付近で 40 周期から 20 周期から 10 周期から 5 周期と, 5×2^n 周期倍分岐が見られ, まず, $\theta = 0.20\pi$ 付近では, 5 周期から 10 周期を取る点が見られた. ここでは 5^n 周期が微々見られた. これに対応した $\phi - \theta$ 分岐図では, 4 点を取る構造が見られた. $\theta = 0.25\pi$ 付近では, 半径 r の取る点が稠密であり, 偏角 ϕ は 1 周期から 2 周期から 1 周期という分岐構造が見られている. つまり, 偏角 1 つの中の半径 r の取る値が稠密であることがわかる. $\theta \geq 0.30\pi$ 以降は半径 r は 8 周期から 16 周期, 9 周期から 18 周期, 10 周期から 20 周期と周期倍分岐が見られた.

4.4 $H_3(x)$ を加えたときの K-model の構造

K-model に $H_3(x)$ を加えたときの数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + (8x_n^3 - 12x_n)ae^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

$m = 3$ における 2 パラメータ分岐図では, 広い範囲でカオス解が見られた. その中で $0 \leq \theta \leq 0.50\pi, 0 \leq a \leq 0.25$ の範囲において, 分岐構造が見られたため, ここを拡大して解析する (図 4.7). この分岐図ではカオス解の中に, 周期構造が見られた. そこで, $0 \leq a \leq 0.05$ の範囲において, θ を $\theta = 0.40\pi$ として固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r-a$ 分岐図, $\phi-a$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタおよび $0.195\pi \leq \theta \leq 0.40\pi$ の範囲でパラメータ a を $a = 0.05$ と固定したときの 1 パラメータ分岐図 $r-\theta$ 分岐図, $\phi-\theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る (図 4.8).

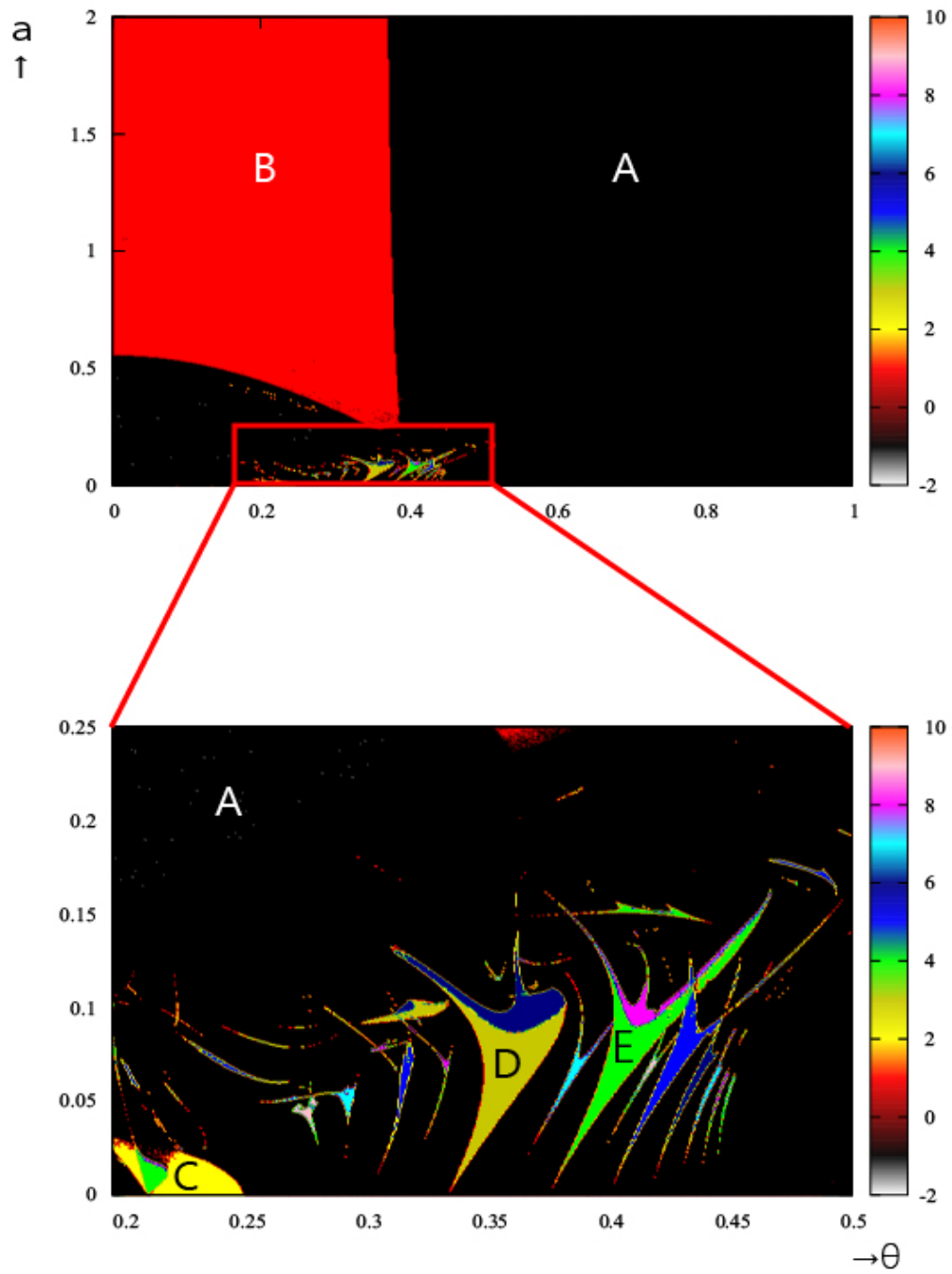


図 4.7: $m = 3$ での 2 次元分岐図

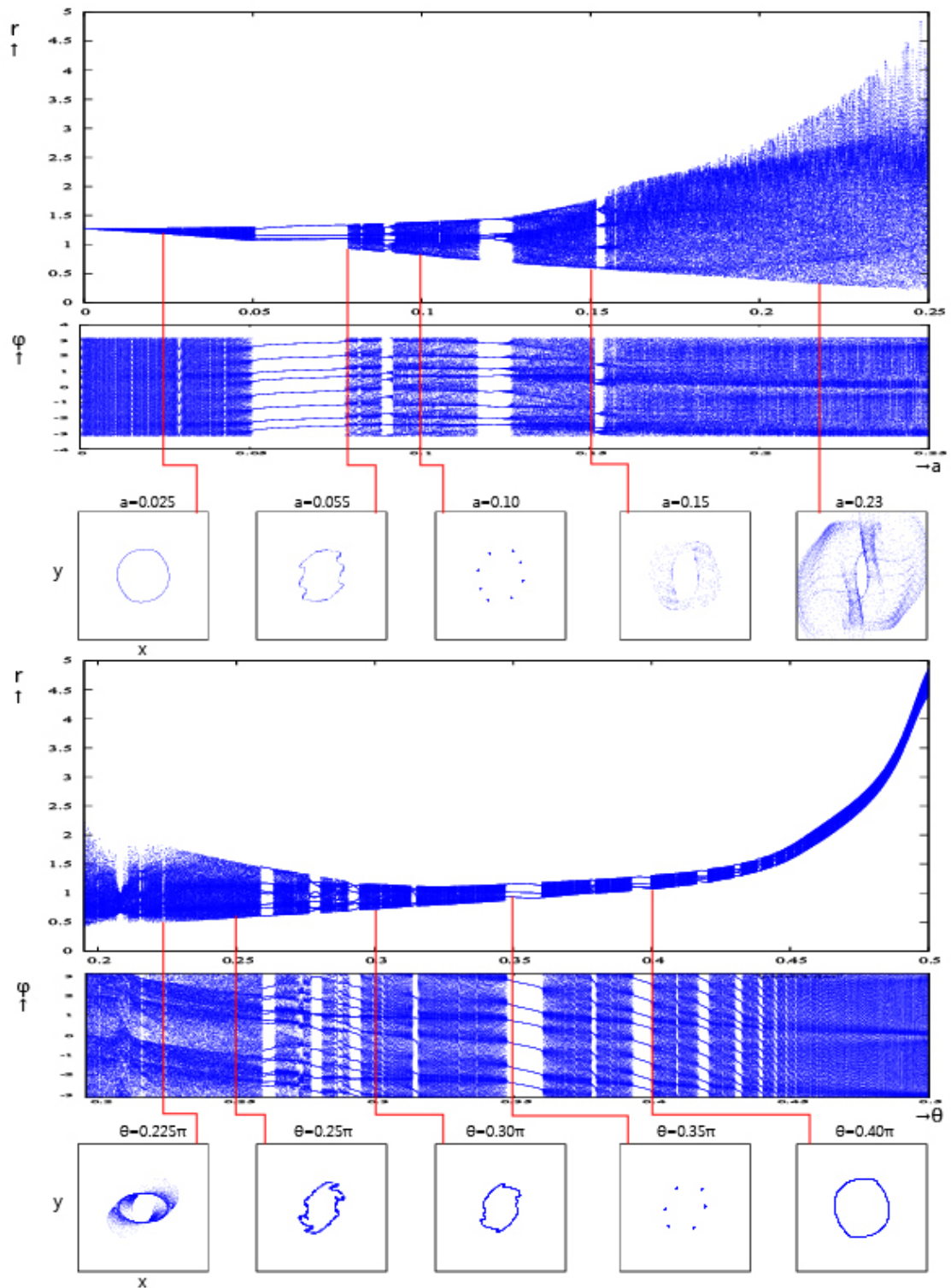


図 4.8: $m = 3$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ

$0 \leq a \leq 0.05$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, カオス解が生じている. それが a の値が増加するにつれて半径 r の取る範囲も広がっている. それと対応して $\phi - a$ 分岐図も同様にカオス解が生じている. 状態空間におけるアトラクタでは 1 周期を取るような構造が見られたが, 半径 r と偏角 ϕ の値を多く取る. $0.05 \leq a \leq 0.055$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, r は 4 点を取る. それに対し $\phi - a$ 分岐図は 8 点を取る. $a = 0.105$ において, $r - a$ 分岐図を見ると, r は値を多く取る. またこの範囲における $\phi - a$ 分岐図は 8 点を取る構造となっている. $a = 0.15$ では半径 r と偏角 ϕ がカオス解を生じた.

次に $r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る. $r - \theta$ 分岐図からわかるように, $0.195\pi \leq \theta \leq 0.25\pi$ までの範囲ではカオス解が見られる. この範囲におけるアトラクタも半径 r の取る値が稠密で大きく広がるような構造となっている. 以降, カオス解が生じた構造が見られた. なお, 状態空間におけるアトラクタでは, 同範囲いにおいて半径 r と偏角 ϕ の値を多く取るような構造が見られた後, 歪んだ円形アトラクタが見られた. $0.25\pi \leq \theta \leq 0.30\pi$ では, $\theta = 0.26\pi$ では 7 点の周期が見られた. その後カオス解が生じ, $\theta = 0.27\pi$ 付近では, 周期構造が見られた. $\theta = 0.272\pi$ 付近では大きく分けて 7 周期の分岐構造だが, その中でカオス解が生じている構造が見られた. $\theta = 0.35\pi$ では, 半径 r は 3 点を取る周期となり, 偏角 ϕ は 6 点を取る. $\theta = 0.35\pi$ 以降, カオス解が生じた.

4.5 $H_4(x)$ を加えたときの K-model の構造

K-model に $H_4(x)$ を加えたときの数理モデルを以下に表す.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (x_n \cos \theta - y_n \sin \theta)/r_n^2 + (16x_n^4 - 48x_n^2 + 12)ae^{-x_n^2} \\ y_{n+1} = y_n - (x_n \sin \theta + y_n \cos \theta)/r_n^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

$m = 4$ における 2 パラメータ分岐図では, 広い範囲でカオス解が見られた (図 4.9). その中で $0 \leq \theta \leq 0.43\pi, 0 \leq a \leq 0.5$ の範囲において, θ を $\theta = 0.335\pi$ として固定したときの 1 パラメータ分岐図 ($r - a$ 分岐図, $\phi - a$ 分岐図) と状態空間におけるアトラクタおよび $0.195\pi \leq \theta \leq 0.43\pi$ の範囲でパラメータ a を $a = 0.285$ と固定したときの 1 パラメータ分岐図 ($r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図) と状態空間におけるアトラクタをしてみる. 全体的に横広がり分岐構造が見られ, $0 \leq a \leq 0.05, 0.2\pi \leq \theta < 0.4\pi$ の範囲においては多くの周期点を取る分岐構造が見られた. また, $0.15 < a < 0.3$ の範囲では 1 周期と 2 周期の点が集中している. $a < 0.30$ 以降は様々な周期の点の集まりが見られ複雑な分岐構造が見られたため, ここを拡大して解析する (図 4.10).

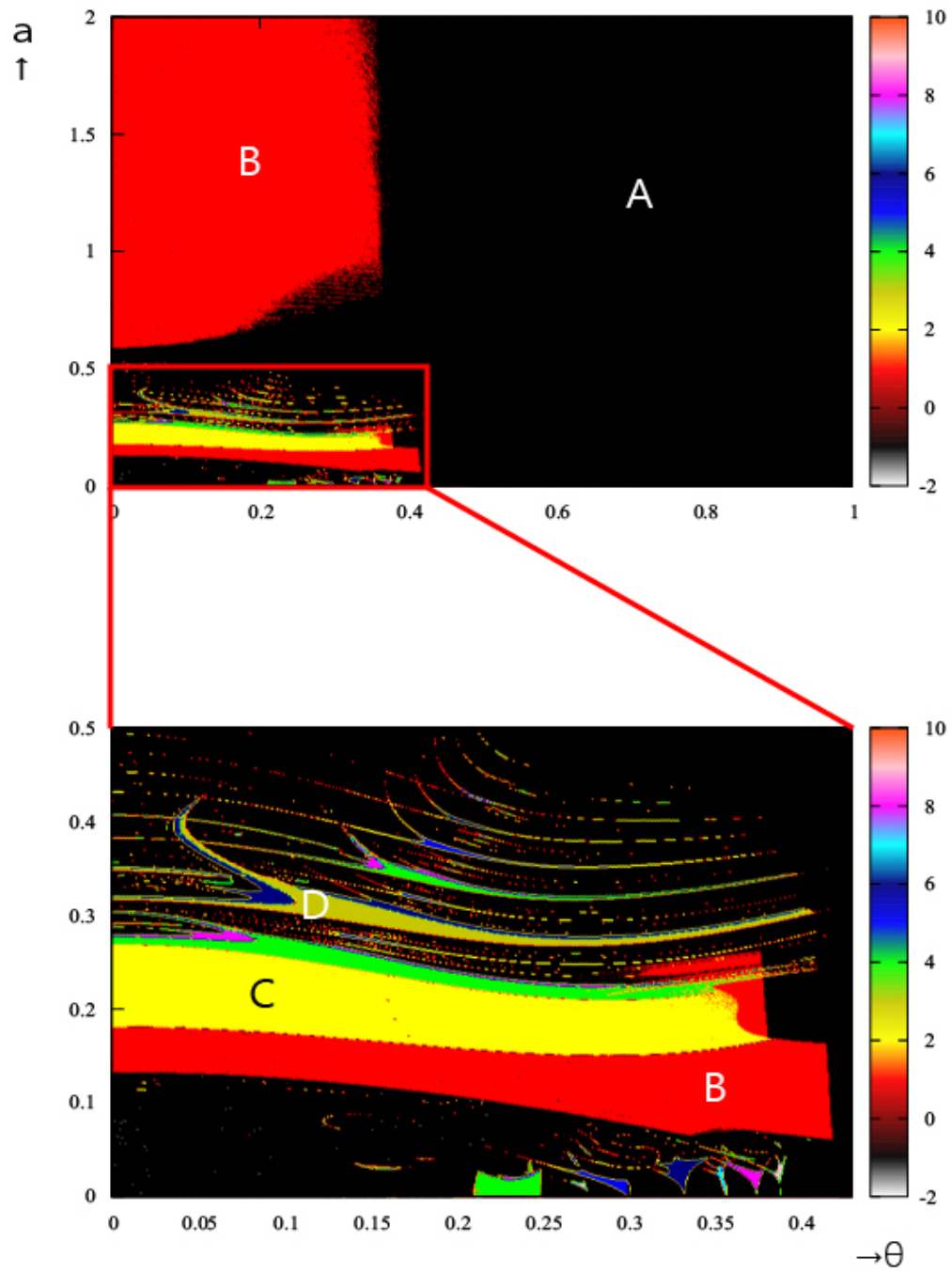


図 4.9: $m = 4$ の 2 次元分岐図

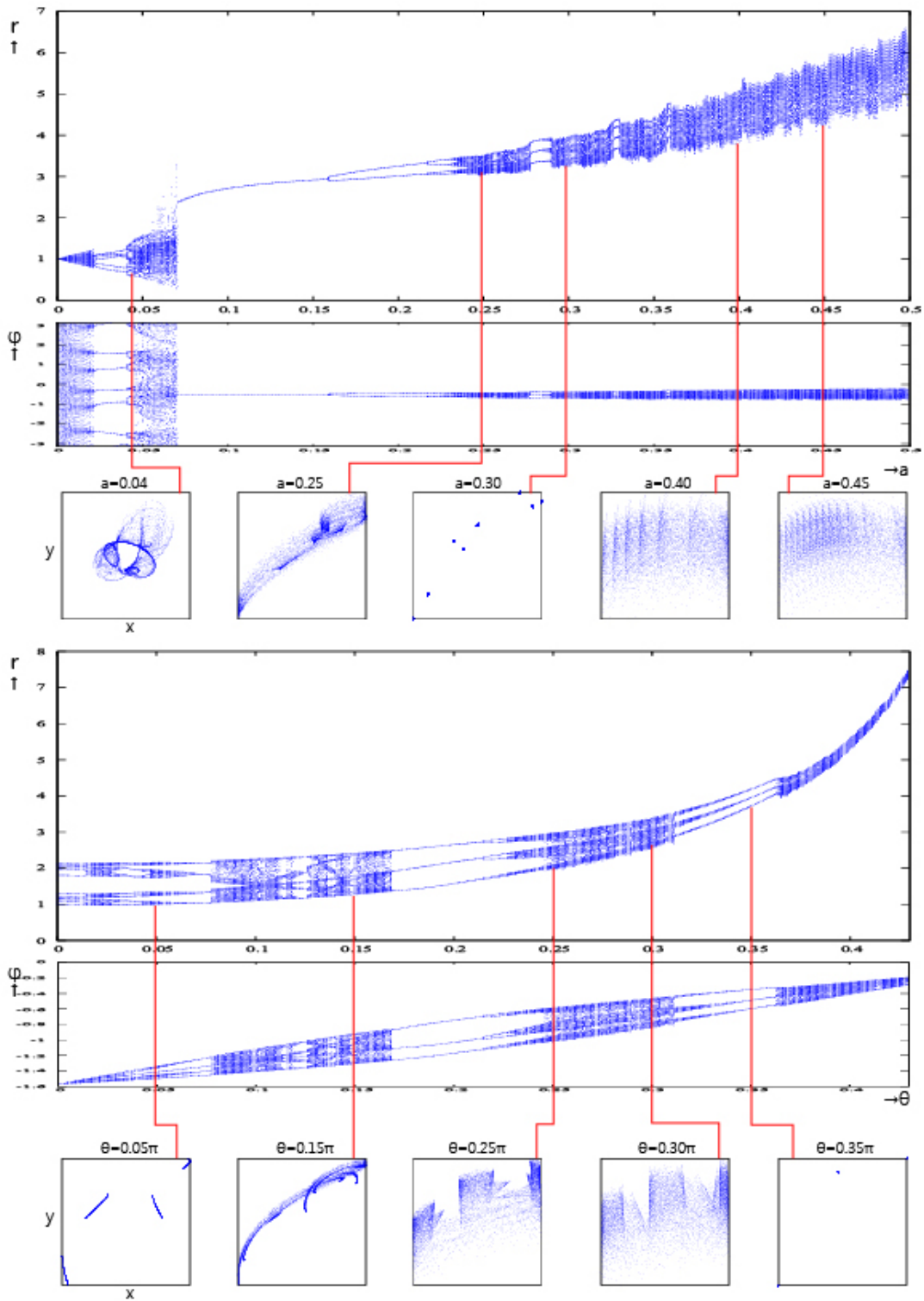


図 4.10: $m = 4$ での各分岐図と xy 平面での状態空間におけるアトラクタ

$0 \leq a \leq 0.05$ の範囲において, $r - a$ 分岐図では, $0 \leq a < 0.02$ においてカオス解が生じている. $0.02 < a \leq 0.04$ 付近では 6 点の周期構造が見られた. $0.04 < a$ では, 12 周期から 24 周期から 48 周期からカオス解を生じた後, 再び 12 周期から 24 周期から 48 周期からカオス解が生じているため 6×2^n 周期倍分岐が見られた. $\phi - a$ 分岐図を見ると, 同様にカオス解が生じた後, 6 周期から 12 周期から 24 周期から 48 周期からカオス解と周期倍分岐が見られ 6×2^n 周期倍分岐となっている. また, 状態空間におけるアトラクタは上記の分岐図の構造に反映されたアトラクタになる. $0.055 < a \leq 0.25$ の範囲において, $r - a$ 分岐図を見ると, 1 周期から 2 周期から 4 周期からカオス解と 2^n 周期倍分岐が生じた. $\phi - a$ 分岐図も 1 周期から 2 周期からカオス解と周期倍分岐が生じた. xy 平面における状態空間でのアトラクタは 1 点のみから 2 点を取るアトラクタになった後, それまで歪んだ円形アトラクタとは別に, 右肩上がりに弧を描くようなアトラクタが見られた. $0.25 < a$ において, $r - a$ 分岐図を見ると, r はカオス解を生じながら値が増加している. $\phi - a$ 分岐図も同様, カオス解が生じた.

次に $r - \theta$ 分岐図, $\phi - \theta$ 分岐図と状態空間におけるアトラクタを見る. $r - \theta$ 分岐図から, $0 \leq \theta \leq 0.05\pi$ の範囲において半径 r は 12 点を取る周期が見られた後, カオス解が生じた. $\theta = 0.02\pi$ 付近では 20 点を取る周期構造となった. $0.03\pi \leq \theta \leq 0.045\pi$ 付近では, 8 周期から 16 周期 8 周期から 4 周期から 8 周期から 16 周期からカオス解と 8×2^n 周期倍分岐が生じた. $\phi - \theta$ 分岐図では $0 \leq \theta \leq 0.014\pi$ において 10 点を取る構造が見られた. 以降はカオス解が生じ, 0.02π 付近では半径 r の分岐図同様, 20 点を取る構造となった. この範囲におけるアトラクタも半径 r の取る値が稠密で大きく広がるような構造となっている. 以降, カオス解が生じた構造が見られた. この範囲における xy 平面での状態空間におけるアトラクタは, 4ヶ所にアトラクタが生じた. $\theta = 0.15\pi$ において, カオス解を生じながら右肩上がりに弧を描くようなアトラクタが生じた. $\theta = 0.20\pi$ 付近では半径 r も偏角 ϕ も 3 点を取る. 以降, カオス解が生じながら半径 r の値も増加していき, それと同様偏角 ϕ もカオス解が生じ, アトラクタもカオス解が生じた.

第5章 映像表現への制作過程

前章では, エルミート多項式 $H_m(x)$ を K-model に加えた非線形システムの数理モデルを展開した. ここでは, その数理モデルの xy 平面における状態空間のアトラクタの構造と振る舞いをアニメーションとして映像表現する. これにより非線形システムの数理モデルの「動き」を見ることが可能である. 回転角 θ とパラメータ a をそれぞれ時間軸として変化させる. 時刻 n を $(1 \leq n \leq 1000)$ として回転角 θ を $\theta = \theta_0 + (\theta_n - \theta_0)/(n - 1)$ とし, パラメータ a を $a = a_0 + (a_n - a_0)/(n - 1)$ とする. この2つの時間軸パラメータによるアトラクタの移り変わりを映像表現することにより, 非線形システムの数理モデルの構造がより理解しやすくなると考えた.

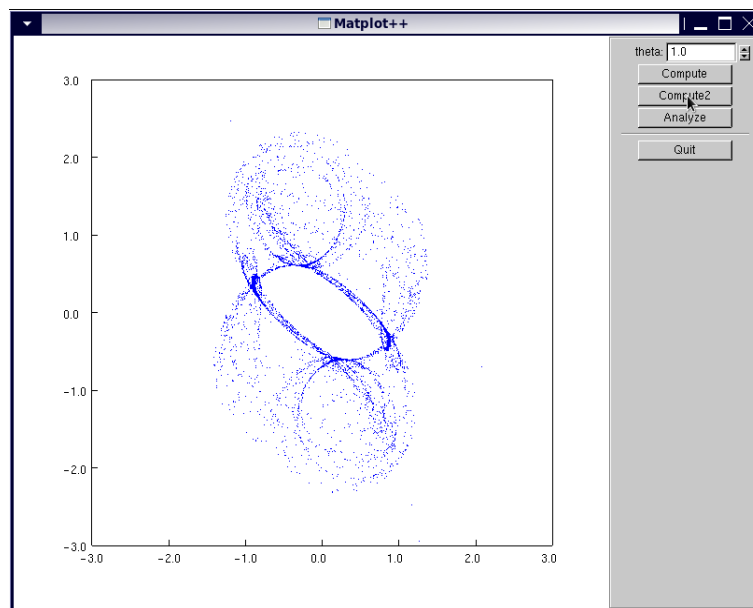


図 5.1: $H_1(x)$ を加えた K-model の xy 平面での状態空間におけるアトラクタのアニメーションによる映像表現

第6章 考察

エルミート多項式 $H_m(x)$ と、パラメータ a を加えた新たな非線形システムを持つ数理モデルを提案した。 m 次の2次元分岐図では広い範囲でカオス解が生じていることがわかった。その中でも分岐構造が見られたが主に周期倍分岐が見られた。K-model にエルミート多項式 $H_m(x)$ を与えることにより、2次元分岐図の構造も大きく異なることがわかった。

$m = 0$ における1次元分岐図では、回転角 θ の値が増加するにつれ、半径 r の値を多くとった。それに伴い偏角 ϕ も値を多くとり、状態空間におけるアトラクタもカオス解で構成された。 $ae^{-x_n^2}$ を加えたことで重み関数 $e^{-x_n^2}$ とパラメータ a の積の値のみで構成されたと考える。 x の値が更新されるたびに重み関数 $e^{-x_n^2}$ の x_n の値が増加しても発散しないように制限を掛けたため、カオス解が生じたと考えられる。

$m = 1$ における1次元分岐図では、周期倍分岐が見られた。 $r - a$ 分岐図で、 $a = 0.89$ 以降で半径 r が1点しか取らず偏角 ϕ の値が多く取る構造になったのは、 $2ax_n e^{-x_n^2}$ を加えたことによりパラメータ a が増加するにつれ $m = 0$ の場合より x_n の値も更新されていくため早い段階でカオス解が生じた。

$m = 2$ における1次元分岐図では、広い範囲でカオス解が生じた。また状態空間におけるアトラクタも歪んだ円形アトラクタが見られた。 $(4x_n^2 - 2)ae^{-x_n^2}$ を加えたことで、 x_n の値が更新されても $(4x_n^2 - 2)$ の値は小さくなるため K-model に影響が及ぼされカオス解が生じた。

$m = 3, m = 4$ における1次元分岐図では、パラメータ a 、回転角 θ の両方の値が増加していくにつれ、カオス解が生じた。 $(8x_n^3 - 12x_n)ae^{-x_n^2}$ 、 $(16x_n^4 - 48x_n^2 + 12)ae^{-x_n^2}$ をそれぞれ加えたことにより、エルミート多項式の影響が大きく影響したと考える。K-model の安定状態が乱雑になり分岐構造が大きく異なった。また、これらの分岐構造を映像表現で展開することにより、分岐構造解析による周期倍分岐やカオス解が状態空間におけるアトラクタで表現することで、非線形システムの数理モデルの「動き」を表現できたと考える。

第7章 結言

7.1 まとめ

本研究の目的は, K-model の拡張からその分岐構造を解析し, その分岐構造での状態空間におけるアトラクタを映像表現として展開した. K-model にエルミート多項式を加えた新たな非線形システムを持つ数理モデルを提案した. パラメータを回転角 θ と a を動かしたときの分岐構造を解析した結果, m 次におけるエルミート多項式を加えた K-model の分岐構造では, 周期倍分岐やカオス解など複雑な分岐構造が見られた. また, xy 平面での状態空間におけるアトラクタもその振る舞いが異なる. パラメータ回転角 θ と a を動かしたときの xy 平面での状態空間におけるアトラクタにより非線形システムの「動き」を表現した. 非線形システムを持つ数理モデルの構造を映像表現にすることで非線形システムの織りなす自然現象と構造を映像表現という形で非線形システムの理解が促進されると考えた.

7.2 今後の展望

本研究で提案した新たな非線形システムの数理モデルをさらに拡張させその分岐構造を解析していくことを試みる. 具体的には別のパラメータを用いてその分岐構造解析を行うことと, 本研究で用いたエルミート多項式以外の数理モデルを付加させ, それを映像表現として展開する. 付加させる非線形システムの数理モデルを用いることでその分岐構造も異なる. 今後, 新たな非線形システムの数理モデルを展開していくことを試みる.

謝辞

本研究を進めるにあたり, 長期にわたりご指導いただきました香取勇一准教授(公立はこだて未来大学)に深く感謝いたします.

参考文献

- [1] 小室元政, 「新版 基礎からの力学系 分岐解析からカオスの遍歴へ」, サイエンス社, 2009.
- [2] 木本圭子ら, 「非線形力学系の分岐構造による動きの表現」, 2006.
- [3] 木本圭子, 「Imaginary · Numbers」, 工作舎, 2003.
- [4] 「木本圭子」, <http://www.kimoto-k.com/>, 2016.
- [5] natural science, 「エルミート多項式の直行性を確かめる」, 2011.
- [6] 川上博, 上田哲史, 「C によるカオス CG」, 1994.
- [7] 山本昌志, 「gnuplot の精義」, 2013.
- [8] Steven H. Strogatz, 「ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス」, 丸善出版, 2015.

付録A K-modelを応用した 非線形ダイナミクスの数理モデル

c と c++による実装

```
#if 0
#!/bin/sh
g++ -g -O2 -lglut -lGLU -lGL -I../ -I../matplotpp $0
../matplotpp.a ../libglui.a
exit
#endif
#include <cstdio>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <iostream>
#include <cstdlib>
using namespace std;
float a;
float theta=1.0;
double x,y;

//更新するための構造体 Record
struct Record{
    double x,y,r,phi;
    double theta;
};
vector<Record> rec;

//m=0 のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double a){
    return x-(x*cos(theta)-y*sin(theta))/(r*r)+a*exp(-(x*x));
}

//m=1 のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double a){
    return x-(x*cos(theta)-y*sin(theta))/(r*r)+2*a*x*exp(-(x*x));
}
```

```
//m=2 のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double a){
    return x-(x*cos(theta)-y*sin(theta))/(r*r)+(4*x*x-2)*a*exp(-(x*x));
}

//m=3 のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double a){
    return x-(x*cos(theta)-y*sin(theta))/(r*r)+(8*x*x*x-12*x)*a*exp(-(x*x));
}

//m=4 のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double a){
    return x-(x*cos(theta)-y*sin(theta))/(r*r)+(16*x*x*x*x-48*x*x+12)*a*exp(-(x*x));
}

//状態変数 y
double fy(double x, double y, double theta, double r){
    return y-(x*sin(theta)+y*cos(theta))/(r*r);
}

//xy 平面での状態空間におけるアトラクタ
void Compute(int ccc){

    Record r1;
    double _x,_y;
    double r;//半径
    double phi;//偏角
    double a;//パラメータ
    x=1;y=1;

    for(int n=0;n<10000;n++){
        r=sqrt(x*x+y*y);
        _x=fx(x,y,theta,r,a);
        _y=fy(x,y,theta,r);
        phi=atan2(_x._y);
        x=_x;
        y=_y;
        if(n>1000){
            r1.x=x;
            r1.y=y;
        }
    }
}
```

```
        r1.r=r;
        r1.phi=phi;
        r1.theta=theta;
        rec.push_back(r1);
    }
}
}

const int Np=10000;//データ数
double X[Np],Y[Np];//状態変数 x,y
void display();
double p1,p1min=0.0,p1max=1.0;//回転角 theta
double p2,p2min=-2.0,p2max=2.0;//パラメータ変数 a
int nmax=5000;//各パラメータ変数のデータ数

//xy 平面での状態空間におけるアトラクタ (アニメーション)
void Compute2(){
    double _x,_y;
    double r;
    for(int i=0;i<Np;i++){
        X[i]=rand()/(RAND_MAX+1.0);
        Y[i]=rand()/(RAND_MAX+1.0);
    }

    for(int n=0;n<nmax;n++){
        p1=p1min+(p1max-p1min)*n/(nmax-1);
        p2=p2min+(p2max-p2min)*n/(nmax-1);
        for(int i=0;i<Np;i++){
            r=sqrt(X[i]*X[i]+Y[i]*Y[i]);
            _x=fx(X[i],Y[i],p1,r,p2);
            _y=fy(X[i],Y[i],p1,r);
            X[i]=_x;//状態変数 x を更新
            Y[i]=_y;//状態変数 y を更新
        }
        display();
    }
}

//回転角 theta と半径 r による 1 パラメータ分岐関
void Analyze(int c){
    rec.clear();
```

```
    for(float a=0.39;a<0.9;a+=0.001){
        theta=a;
        Compute(0);
    }
}
//回転各 theta と偏角 phi による 1 パラメータ分岐図
void Analyze2(int b){
    rec.clear();
    for(float a=0.39;a<0.9;a+=0.001){
        theta=a;
        Compute(0);
    }
}
#include "glui.h"
#include "matplotpp.h"
class MP :public MatPlot{void DISPLAY(){
    layer("plot1",0); axis(-3,3,-3,3);
    begin(); for(int i=0;i<rec.size();i++){vertex(rec[i].x, rec[i].y);}
    set(".");

    layer("plot2",1); axis(-3,3,-3,3);
    begin(); for(int i=0;i<Np;i++){vertex(X[i],Y[i]);}
    set(".");

    layer("plot3",0);
    begin(); for(int i=0;i<rec.size();i++){vertex(rec[i].theta,rec[i].r);}
    set(".");

    layer("plot4",0);
    begin(); for(int i=0;i<rec.size();i++){vertex(rec[i].theta,rec[i].phi);}
    set(".");

}}mp;
int window_id;
void idle( void ){glutSetWindow(window_id); glutPostRedisplay();
usleep(50000);}
void display(){ mp.display(); }
void reshape(int aw,int ah){
int x,y,w,h;
GLUI_Master.get_viewport_area(&x,&y,&w,&h);
mp.reshape(w,h);
```



```
}  
void mouse(int button,int state,int x,int y){ mp.mouse(button,state,x,y);  
}  
void motion(int x, int y ){ mp.motion(x,y); }  
void passive(int x, int y ){ mp.passivemotion(x,y); }  
void keyboard(unsigned char key,int x,int y){  
mp.keyboard(key, x, y); }  
int main(int argc, char* argv[]){  
    glutInit(&argc,argv);  
    window_id=glutCreateWindow(50,50,800,600,(char*)"Matplot++");  
    glutDisplayFunc( display );  
    glutMotionFunc( motion );  
    glutPassiveMotionFunc(passive);  
    GLUT_Master.set_glutReshapeFunc( reshape );  
    GLUT_Master.set_glutKeyboardFunc( keyboard );  
    GLUT_Master.set_glutMouseFunc( mouse );  
    GLUT_Master.set_glutIdleFunc( idle );  
    GLUT *glui; glui=GLUT_Master.create_glui_subwindow  
    (window_id,GLUT_SUBWINDOW_RIGHT );  
    new GLUT_Spinner( glui, "theta:", &theta );  
    //new GLUT_Checkbox( glui, "Pause", &is_pause );  
    new GLUT_Button( glui,"Compute", 0,Compute );  
    new GLUT_Button( glui,"Compute2", 0,(GLUT_Update_CB)Compute2 );  
    new GLUT_Button( glui,"Analyze", 0,Analyze );  
    glui->add_separator();  
    new GLUT_Button( glui,"Quit", 0,(GLUT_Update_CB)exit );  
    glui->set_main_gfx_window(window_id);  
    glutMainLoop();  
    return 0;  
}
```

付録B 2パラメータ分岐図

cによる実装

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define Pi 3.141592

//m=0のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double pi, double a){
    return x-(x*cos(theta*pi)-y*sin(theta*pi))/(r*r)+a*exp(-(x*x));
}

//m=1のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double pi, double a){
    return x-(x*cos(theta*pi)-y*sin(theta*pi))/(r*r)+2*x*a*exp(-(x*x));
}

//m=2のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double pi, double a){
    return x-(x*cos(theta*pi)-y*sin(theta*pi))/(r*r)+(4*x*x-2)*a*exp(-(x*x));
}

//m=3のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double pi, double a){
    return x-(x*cos(theta*pi)-y*sin(theta*pi))/(r*r)+(8*x*x*x-12*x)*a*exp(-(x*x));
}

//m=4のエルミート多項式の一般解を加えた状態変数 x
double fx(double x, double y, double theta, double r, double pi, double a){
    return x-(x*cos(theta*pi)-y*sin(theta*pi))/(r*r)+(16*x*x*x*x-48*x*x-12)*a*exp(-(x*x));
}

//状態変数 y
double fy(double x, double y, double theta, double r, double pi){
```

```
    return y-(x*sin(theta*pi)+y*cos(theta*pi))/(r*r);
}

const int nrec=100;//記憶用配列

//周期判別関数
int FindPeriod(double theta, double a){
    double x=1,y=1;
    double _x,_y;
    double r;
    int n=0;
    int irec=0;
    double recx[nrec],recy[nrec];

    while(irec<nrec){
        r=sqrt(x*x+y*y);
        _x=fx(x,y,theta,r,Pi,a);
        _y=fy(x,y,theta,r,Pi);
        x=_x;
        y=_y;
        n++;

        if(n>2000){
            recx[irec]=x;
            recy[irec]=y;
            irec++;
        }
    }
}

int max_period=10;//最大周期数
double dist;//距離
double eps=1e-7;//e-近傍を 0.000001 とする
double divergence=1000;//発散値
int i;
int per=0;
double r0,ri;
for(i=1;i<max_period;i++){
    r0=(recx[0]*recx[0]+recy[0]*recy[0]);//半径 r0 を計算
    ri=(recx[i]*recx[i]+recy[i]*recy[i]);//半径 rn を計算
    dist=fabs(r0-ri); 距離を計算
    if(per==0&&dist<eps){per=i;}//周期をカウント
}
```

```
    if(dist>divergence){per=-2;}//発散とする
}
if(per==0){per=-1;}//カオスとする
return per;
}

int main(void){
    double p1,p1min=0.0,p1max=1.0;//パラメータ変数 theta
    double p2,p2min=0.0,p2max=2.0;//パラメータ変数 a
    int ip1,np1=640;//theta を 640 分割
    int ip2,np2=480;//a を 480 分割
    int per;

    for(ip1=0;ip1<np1;ip1++){
        for(ip2=0;ip2<np2;ip2++){
            p1=p1min+(p1max-p1min)*ip1/(np1-1);
            p2=p2min+(p2max-p2min)*ip2/(np2-1);
            per=FindPeriod(p1,p2);
            printf("%f %f %d\n", p1, p2, per);
            if(p2==p2max)
                printf("\n");//データ作成のための改行
        }
    }
    return 0;
}
```

目 次

2.1	K-model の分岐図と状態空間におけるアトラクタの再現	3
2.2	サイン波を加えた K-model の状態空間におけるアトラクタの再現	4
3.1	m 次における $H_m(x)$ のグラフ	6
4.1	$m = 0$ での 2 次元分岐図	10
4.2	$m = 0$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ	11
4.3	$m = 1$ での 2 次元分岐図	14
4.4	$m = 1$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ	15
4.5	$m = 2$ での 2 次元分岐図	18
4.6	$m = 2$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ	19
4.7	$m = 3$ での 2 次元分岐図	22
4.8	$m = 3$ での 1 次元分岐図と状態空間におけるアトラクタ	23
4.9	$m = 4$ の 2 次元分岐図	26
4.10	$m = 4$ での各分岐図と xy 平面での状態空間におけるアトラクタ	27
5.1	$H_1(x)$ を加えた K-model の xy 平面での状態空間におけるアトラクタのアニメーションによる映像表現	29